
Quanten-Hall-Effekt und Supraleitung



TECHNISCHE
UNIVERSITÄT
DARMSTADT

Inhaltsverzeichnis

1	Vorbereitung	2
1.1	Einleitung	2
1.2	Klassischer Hall-Effekt	2
1.3	2-dimensionales Elektronengas	2
1.4	Phänomenologie des Quanten-Hall-Effekts	4
1.5	Theoretische Erklärung des Quanten-Hall-Effekts	4
1.6	Supraleitung	5
2	Durchführung und Auswertung	6
2.1	Vorbemerkungen	6
2.2	Messung	6
2.3	Bestimmung der Feinstrukturkonstante	7
2.4	Bestimmung der Ladungsträgerdichte und Abschätzung der Elektronenbeweglichkeit	7
3	Fazit	8

Erklärung zur Eigenständigkeit

Hiermit versichern wir das vorliegende fortgeschrittenen Praktikum ohne Hilfe Dritter nur mit den angegebenen Quellen und Hilfsmitteln angefertigt zu haben. Alle Stellen, die aus Quellen entnommen wurden, sind als solche kenntlich gemacht. Diese Arbeit hat in gleicher oder ähnlicher Form noch keiner Prüfungsbehörde vorgelegen.

Johan Eggers

Nils Griebe

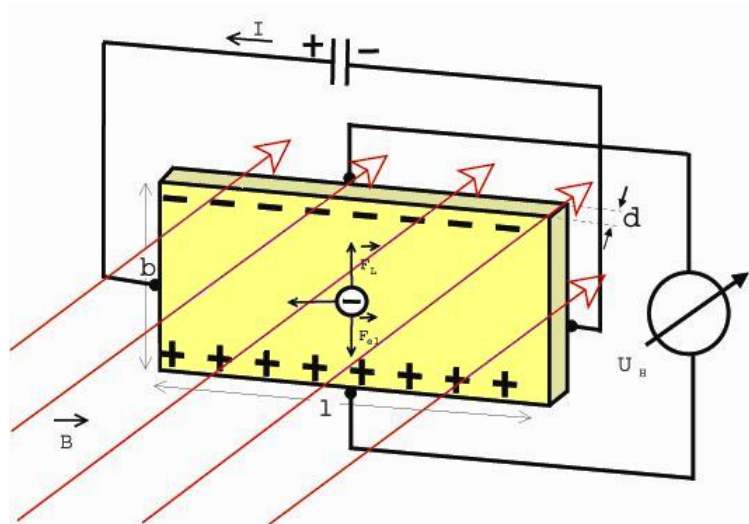
1 Vorbereitung

1.1 Einleitung

Supraleitung ist ein Effekt, der bei tiefen Temperaturen auftritt und sich im raschen Abfall des Widerstands des Materials äußert (der Widerstand fällt fast auf 0Ω ab). Beim Quanten-Hall-Effekt treten im Gegensatz zum klassischen Hall-Effekt Plateaus im Hall-Widerstand-Magnetfeld-Diagramm auf (beim klassischen Hall-Effekt ist dieser Zusammenhang linear). Beide Effekte sollen in diesem Versuch untersucht werden.

1.2 Klassischer Hall-Effekt

Der klassische Hall-Effekt beschreibt den Zusammenhang zwischen dem durch einen Metallstreifen fließenden Strom und der senkrecht dazu anliegenden Spannung, wenn ein homogenes Magnetfeld orthogonal zur Oberfläche des Streifens orientiert ist. Ein dazu passender Aufbau ist unten illustriert.



schematische Darstellung einer Hall-Sonde

Quelle: <http://www.chemgapedia.de>

Die durch das Magnetfeld und die Bewegung der Elektronen hervorgerufene Kraft, bewirkt eine Umverteilung der Elektronen im Metallstreifen derart, dass die durch das B-Feld hervorgerufene Lorentzkraft, durch das durch die veränderte Ladungsverteilung induzierte E-Feld und die daraus resultierende Kraft auf die Elektronen kompensiert wird. Sei A die Querschnittsfläche des Metallstreifens in Flussrichtung des Stroms, n die Ladungsträgerdichte, b die Breite des Streifens, B der Betrag des zu der Fläche senkrecht stehenden Magnetfeldes und E das hervorgerufene elektrische Feld, dann folgt:

$$v = \frac{I}{n \cdot e \cdot A} \quad (\text{Geschwindigkeit der Elektronen})$$

$$F = v \cdot B \cdot e = \frac{I \cdot B}{n \cdot A} = E \cdot e \quad (\text{Die von B-Feld bzw. E-Feld hervorgerufene Kraft auf die Ladung})$$

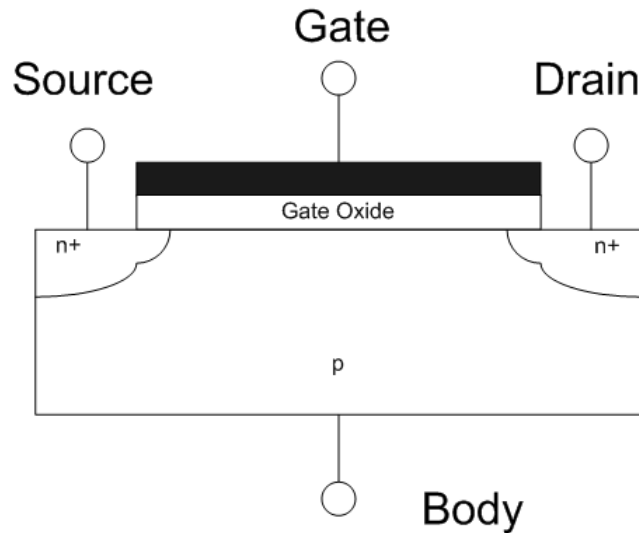
Folglich gilt $\frac{I \cdot B}{n \cdot A \cdot e} = E \Rightarrow \Phi = b \cdot E = \frac{I \cdot B \cdot b}{n \cdot A \cdot e} \Rightarrow R_H = \frac{B \cdot b}{n \cdot A \cdot e}$ (wobei Φ die erzeugte Potenzialdifferenz und R_H der Hall-Widerstand ist)

1.3 2-dimensionales Elektronengas

Der Quantenhall-Effekt folgt aus den durch geeignete Randbedingungen erzeugte Quantisierung der Elektronenenergien. Die eine Randbedingung ist das Magnetfeld, wie im klassischen Effekt, die weitere Randbedingung ist eine sehr niedrige

Temperatur (dazu mehr in der theoretischen Erklärung des Quanten-Hall-Effektes), eine weitere Randbedingung um die es nun gehen soll ist die des 2-dimensionalen Elektronengases. Man möchte also Randbedingungen erzeugen, die die Bewegung der Elektronen auf eine 2 dimensionale Ebene zwingt.

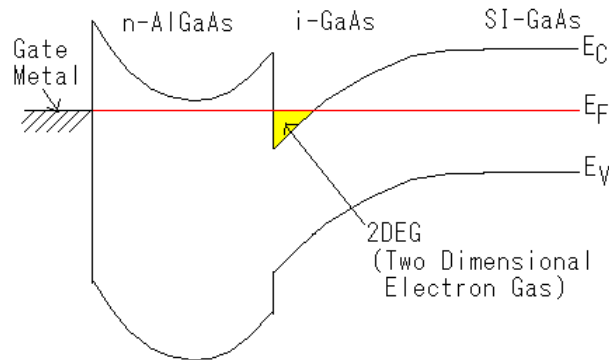
Diese Randbedingungen können durch geeignete Potentialstrukturen erzeugt werden. Dies wird üblicherweise über Silizium-Mosfets oder durch spezielle $GaAs/Ga_{1-x}Al_xAs$ Heterostrukturen realisiert. Im Folgenden ist der Aufbau eines p-Mosfets ersichtlich:



Quelle: http://en.wikipedia.org/wiki/File:FET_cross_section.png

Bei Anlegen einer hinreichend großen positiven Gatespannung wird in einem sehr engen Bereich unter der Oxidschicht das Leitungsband der Elektronen im p-dotierten Silizium unter die Fermienergie gezogen, sodass hier das 2DEG lokalisiert ist. Durch das Verändern der Gatespannung ist die Verzerrung der Bänder regelbar und damit die Elektronendichte des 2DEG.

Bei den schon angesprochenen III-IV Heterostrukturen nutzt man die unterschiedlichen Bandlücken zwischen Leitungs- und Valenzband bei ähnlichen Gitterkonstanten, um durch geeignete Schichtbildung des n-dotierten $Ga_{1-x}Al_xAs$ auf einer p-dotierten $GaAs$ Schicht ebenfalls eine Potentialmulde in der Schichtebene zu erreichen, die knapp unter der Fermi-Temperatur liegt:



Quelle: http://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/3/3f/HighElectronMobilityTrasistor_Band_Image.PNG

Die Elektronendichte kann nun nicht mehr durch eine andere Gate-Spannung verändert werden. Diese Heterostruktur weist außerdem eine weitaus höhere Elektronenbeweglichkeit im Vergleich zu MOSFETs auf.

Die Energie der Elektronenwellenfunktionen im 2DEG (in x,y Ebene) lässt sich nun über ihre Wellenvektoren k folgendermaßen darstellen:

$$E = E_0 + \frac{\hbar^2}{2m}(k_x^2 + k_y^2)$$

fordert man nun L-periodische Wellenfunktionen, so ergeben sich über Lösung der Schrödingergleichung folgende Quantisierungen der Wellenvektoren:

$$k^2 = k_x^2 + k_y^2 = \left(\frac{2\pi}{L}\right)^2 (n_x^2 + n_y^2) = \left(\frac{2\pi}{L}\right)^2 n^2$$

Nun kann man in Hinsicht auf die Definition einer Energiedichte fordern, dass die Energie stets unter einem $E(k)$ bleiben muss:

$E < E(k)$, sodass nun eine endliche Anzahl Z von Zuständen erlaubt ist:

$$Z = \left(\frac{L}{2\pi}\right)^2 \frac{(2\pi)^2 m(E(k) - E_0)}{h^2}$$

Betrachtet man nun die Anzahl möglicher Zustände Z in pro Energie, was als Energieeigenwertdichte bezeichnet wird, so ergibt sich folgende Relation:

$$D(E) = \frac{dZ}{dE} = \left(\frac{L}{h}\right)^2 2\pi m$$

1.4 Phänomenologie des Quanten-Hall-Effekts

Experimentell zeigt sich, dass der Hall-Widerstand einer quasi zweidimensionalen leitenden Schicht bei tiefen Temperaturen und starken Magnetfeldern diskrete Werte annimmt. Genau gilt $R_H = \frac{h}{i \cdot e^2}$ wobei i eine ganze Zahl ist. Der Hall Effekt lässt sich phänomenologisch gut beschreiben, indem man den Leitwert, der in normalen Leitern oder Ohmschen-Widerständen ein Skalar ist als eine 2×2 Matrix auffasst.

Sei ρ nun diese Matrix, dann gilt für das E-Feld in Abhängigkeit von der Stromdichte $\vec{E} = \rho \cdot \vec{j}$

Im Fall des gewöhnlichen Ohmschen-Widerstands hat diese Matrix ρ nur gleiche Einträge auf der Diagonalen und außerhalb dieser nur Nullen, da die Stromdichte immer nur ein E-Feld in Richtung der Stromdichte induziert. Im Falle des Quanten-Hall-Effekts wird aber auch senkrecht zur Flussrichtung ein Feld aufgebaut. Dies äußert sich nun dadurch

, dass $\rho = \begin{pmatrix} \rho_L & \rho_H \\ -\rho_H & \rho_L \end{pmatrix}$ (ρ_L stellt hierbei den ohmschen Widerstand da und ρ_H den Hall-Widerstand). Bei tiefen

Temperaturen vereinfacht sich dies zu $\rho = \begin{pmatrix} 0 & \frac{h}{i \cdot e^2} \\ -\frac{h}{i \cdot e^2} & 0 \end{pmatrix}$.

1.5 Theoretische Erklärung des Quanten-Hall-Effekts

Unter Einfluss des externen Magnetfeldes bilden sich im Energiespektrum des 2DEG Landau-Niveaus aus.

Die Elektronen nehmen im 2DEG dann die Landau-Energieeigenwerte an:

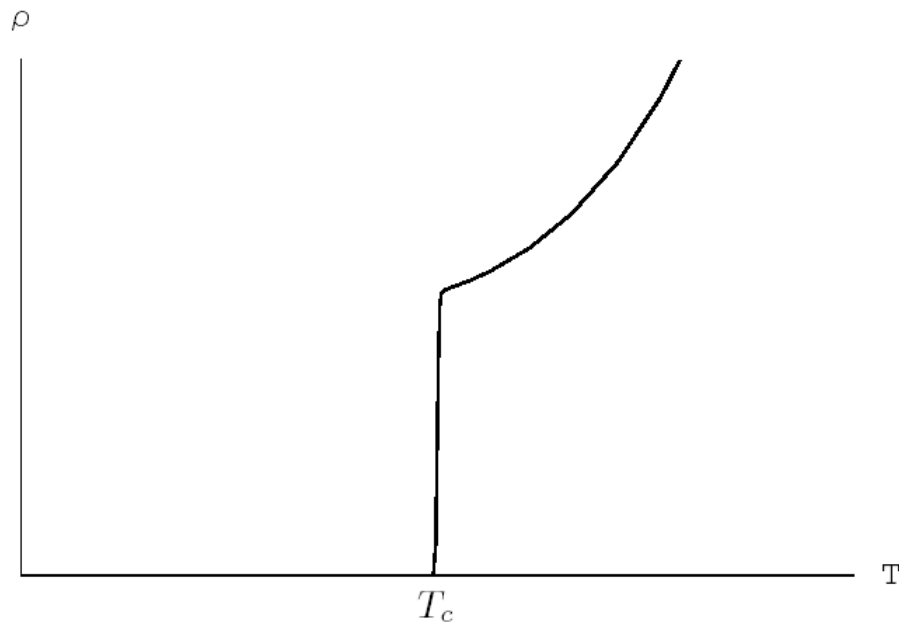
$$E = E_0 + (l + 1/2) \frac{h}{2\pi} \omega_c$$

Dabei ist ω_c die Synchrotronkreisfrequenz.

Unter der Annahme, dass tiefe Temperaturen vorliegen, kann man davon ausgehen, dass die Energieniveaus von unten nach oben bis zur Fermienergie aufgefüllt werden. Liegt die Fermienergie genau zwischen zwei Landau-Niveaus (bzw. wurde ein Landau-Niveau gerade komplett aufgefüllt) findet keine Streuung statt, da keine freien Quantenzustände zur Verfügung stehen, in die die Elektronen gestreut werden können (lokalisierte Zustände). Der Längswiderstand verschwindet folglich und der Hallwiderstand ist konstant auf dem entsprechenden Plateau. Befindet sich die Fermienergie in einem Landau-Niveau wird jedoch eine solche Streuung möglich und die an Deltafunktionen der Zustandsdichte verschwinden. Für den Fall, dass keine Streuung stattfindet, kann man durch klassische Betrachtung der idealen Elektronenbahnen ersehen, dass der elektrische Widerstand gegen 0 gehen würde. Durch diesen Effekt bilden sich dann die oben bereits erwähnten Plateaus im Hall-Widerstand. Aus dieser Erklärung ersieht man auch die Temperaturabhängigkeit dieses Effekts. Würde sich die Temperatur in einem Bereich bewegen, sodass gilt $\Delta E_L \approx T \cdot k_B$ oder $\Delta E_L < T \cdot k_B$, wäre die Näherung eines idealen Fermigases bei tiefen Temperaturen nicht mehr gültig. Die Elektronen könnten trotzdem gestreut werden, auch wenn die Fermienergie zwischen zwei Landau-Niveaus liegt, da die Besetzungswahrscheinlichkeit für freie Landau-Niveaus bei höherer Energie als die Fermienergie bei steigender Temperatur immer höher wird (Es handelt sich nicht mehr um eine scharfe Fermikante) und deswegen nicht mehr als verboten angesehen werden kann.

1.6 Supraleitung

Bei Supraleitern fällt der Widerstand beim Unterschreiten einer kritischen Temperatur T_c schlagartig auf quasi 0Ω ab. Dies ist im nachfolgenden Bild illustriert.



schematische Darstellung des Spezifischen Widerstands eines Supraleiters in Abhängigkeit von der Temperatur

Quelle: www.physik.uni-wuerzburg.de

Neben dieser bemerkenswerten Eigenschaft hat ein gewisser Teil der Supraleiter (Typ I Supraleiter) die Eigenschaft Magnetfelder völlig aus ihrem Inneren zu verdrängen (bis auf eine sehr dünne Randschicht), unabhängig davon wie der Übergang in die supraleitende Phase zustande kam. Wird in einem solchen Typ I-Supraleiter ein kritischer Strom I_c oder ein kritisches Magnetfeld B_c überschritten, brechen diese beiden Effekte zusammen. Die Typ I Supraleitung wird durch die Bildung von Cooper-Paaren erklärt (der zeitweise Zusammenschluss zweier Elektronen). Diese Paarbildung ermöglicht es den Elektronen sich als quasi Bosonen zu verhalten und nicht als Fermionen. Solche Cooper-Paare gehorchen folglich der Bose-Einstein-Statistik und nicht mehr der Fermi-Dirak-Statistik was dazu führt das Cooper-Paare einen starken drang haben den selben Quanten-Zustand zu besetzen (was für Fermionen verboten wäre, da sie dem Pauli-Prinzip unterliegen). Dies führt dazu das Cooper-Paare sich quasi geordnet bewegen und aufgrund dessen der Widerstand in Supraleitern massiv abnimmt (Anders ausgedrückt überspannen die Wellenfunktionen der Cooper-Paare ein makroskopisch großes Gebiet und werden deswegen von den Atomen kaum beeinflusst). Neben diesen Typ I Supraleitern existieren noch Typ II Supraleiter, diese verhalten sich bis zu einer gewissen Feldstärke wie Typ I Supraleiter, oberhalb dies Feldstärke können jedoch vereinzelte Fluss-Schläuche in den Supraleiter eindringen. Erhöht man nun die Feldstärke weiter, bricht der Effekt der Supraleitung wie bei Typ I Supraleitern vollständig zusammen.

2 Durchführung und Auswertung

2.1 Vorbemerkungen

Damit man den Quanten-Hall-Effekt bei vergleichsweise niedrigen Magnetfeld und hohen Temperaturen beobachten kann, ist eine hohe Synchrotronkreisfrequenz erforderlich. Das heisst die effektive Elektronenmasse muss gering sein, was mit einer hohen Elektronenbeweglichkeit korreliert. Die hohe Synchrotronfrequenz bewirkt eine hinreichend große Aufspaltung der Landauenergieeigenwerte sodass die im Vorbereitungsteil erläuterte Bedingung $\Delta E_L > T \cdot k_B$ besser bzw. bei kleinerem Magnetfeld und höherer Temperatur erfüllt ist. Dies sind die Gründe für die Verwendung der Heterostruktur anstatt eines MOSFETs.

Da die Spins der Elektronen noch mit dem äußeren Magnetfeld koppeln (Zeemann-Effekt), ist die Aufspaltung der Energieeigenwerte exakt folgendermaßen:

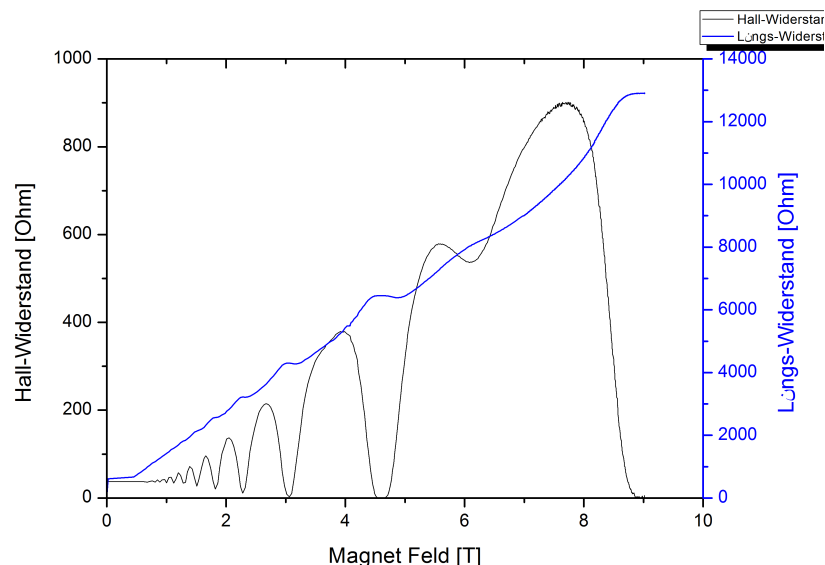
$$E_L = E_0 + (l + 1/2) \frac{\hbar}{2\pi} \omega_c + m_s u_B g_s B$$

Die magnetische Quantenzahl kann dabei je nach Spin-Orientierung $-1/2$ oder $+1/2$ annehmen. Jeder Zustand mit einer Landau-Quantenzahl l besitzt somit 2 Füllfaktoren, da es für jedes l 2 verschiedene Ausrichtungen des Spins gibt. So kann man die Eigenwerte auch durch den Füllfaktor i ausdrücken: $E_L = E_0 + (i/2 + 1/2) \frac{\hbar}{2\pi} \omega_c + (-1)^i m_s u_B g_s B$

Durch Polarisierungseffekte, ist der g -Faktor jedoch nicht ungefähr 2, sondern stark vom Landau-Niveau abhängig (oszillierender g -Faktor). So werden aus Gründen der Energieminimierung zuerst die Zustände so besetzt, dass die Spinausrichtungen parallel sind. Dies ist eine grobe Erklärung dafür, dass fast nur geradzahlige Füllfaktoren beobachtet werden. Vergleiche auch "Theory of Oscillatory g Factor in an MOS Inversion Layer under Strong Magnetic Fields" von Tsuneya Ando und Yasutada Uemura (<http://jpsj.ipap.jp/link?JPSJ/37/1044/>) .

2.2 Messung

Zur Messung wird durch einen Magneten im Kryostat langsam ein Magnetfeld aufgebaut und währenddessen jeweils das Magnetfeld, der Hall-Widerstand und der Widerstand in Längsrichtung gemessen. Während dieser Messung werden 737 Datenpunkte aufgenommen, wobei das Magnetfeld von 0T -9T variiert. Während der ganzen Messung kann angenommen werden, dass diese bei einer Temperatur von 4.28 K stattfindet (nebenher wurde auch noch die Temperatur der Hall-Sonde gemessen diese ist aber fast konstant). Das Ergebnis dieser Messung ist in der unten stehenden Grafik verdeutlicht:



Hall-Widerstand und Längs-Widerstand gegen Magnetfeld aufgetragen

Hier sind im Bereich zwischen 2 und 5 Tesla auch die für den Quanten-Hall Effekt typischen Plateaus zu erkennen.

Um diese aber adäquat auswerten zu können, wird für die weitere Auswertung ein Minimum des Längs-Widerstands das charakteristische Merkmal für ein solches Plateau sein. Die im nachfolgenden stehende Tabelle führt die aus den Messdaten gewonnenen Plateaus auf:

i	B[T]	R_H [Ω]	ΔR_H [Ω]	R_L [Ω]	$R_{H_{theo}}$ [Ω]	$\alpha_{exp}/\alpha_{theo}$	$\Delta\alpha_{exp}/\alpha_{theo}$
2	8.89	12898.85	10.05	0.1	12906.4	1.000	0.001
3	6.080	8025.950	63.000	536.300	8604.267	1.072	0.009
4	4.590	6451.900	10.050	0.100	6453.200	1.000	0.002
6	3.060	4298.950	10.440	2.950	4302.133	1.001	0.002
8	2.280	3217.400	11.662	11.050	3226.600	1.003	0.004
10	1.820	2566.550	11.662	20.150	2581.280	1.006	0.005
12	1.510	2132.450	66.753	26.650	2151.067	1.009	0.032
14	1.280	1815.850	28.792	33.650	1843.771	1.015	0.016
16	1.120	1589.750	45.122	33.950	1613.300	1.015	0.029
18	1.000	1423.600	59.841	34.350	1434.044	1.007	0.042
20	0.890	1271.000	52.953	36.150	1290.640	1.015	0.042
22	0.810	1162.550	50.010	35.850	1173.309	1.009	0.043

2.3 Bestimmung der Feinstrukturkonstante

Die Feinstrukturkonstante ist $\alpha = \frac{e^2}{2\epsilon hc}$. Da die Plateaus des Hall-Widerstand nach der theoretischen Überlegung durch $R_H^{(i)} = \frac{h}{i \cdot e^2}$ gegeben sind, ist direkt ersichtlich, dass $\alpha = \frac{1}{2\epsilon_0 c \cdot i \cdot R_H^{(i)}}$. Aus jedem Plateau lässt sich folglich die Feinstrukturkonstante bestimmen (diese ist auch schon in der obigen Tabelle angegeben). Um nun den Messfehler zu minimieren, bietet es sich an, diese Werte noch zu mitteln. Für diese Mittlung kann man nun folgenden Ansatz machen: $\bar{\alpha} = \sum_1 A_i \alpha_i$ mit $1 = \sum_1 A_i$. Folglich ergibt sich der Fehler für $\bar{\alpha}$ als $(\Delta\bar{\alpha})^2 = \sum_1 (A_i \Delta\alpha_i)^2$. Minimierung unter Nebenbedingung liefert nun $\Delta\alpha_i^2 A_i = \Delta\alpha_j^2 A_j$ und damit $A_i = \frac{1}{\Delta\alpha_i^2 \sum_1 (\alpha_i^{-2})}$.

Bildet man nun diesen gewichteten Mittelwert erhält man $\bar{\alpha} \approx 1.001\alpha_{theo}$ mit dem Fehler $\Delta\bar{\alpha} = 0.00064$

2.4 Bestimmung der Ladungsträgerdichte und Abschätzung der Elektronenbeweglichkeit

Aus der klassischen Theorie des Hall-Effekts folgt, dass $n = \frac{B}{R_H e}$. Für das vierte Plateau ergibt sich damit eine Ladungsträgerdichte von $n = (4.4403 \cdot 10^{15} \pm 6.9 \cdot 10^{12}) \frac{1}{m^2}$. Nun ergibt sich die Ladungsträger-Beweglichkeit $\mu = \frac{1}{R_0 n \cdot e} = (45.7866 \pm 0.0711) \frac{m^2}{Vs}$ ($R_0 = 30.7\Omega$: Widerstand in Längsrichtung ohne Magnetfeld).

3 Fazit

In diesem Experiment ist es grundsätzlich gelungen den Quanten-Hall Effekt nachzuweisen. So konnten die theoretischen Vorhersagen bestätigt werden.

Als Anwendung des Quanten-Hall Efektes ist es auch gelungen die Feinstruktur-Konstante mit einer sonst im studentischen Praktikum unerreichten Genauigkeit zu bestimmen.