
3.18: Stochastische Resonanz

Johan Eggers, Nils Griebe
durchgeführt am 25.10.2010



TECHNISCHE
UNIVERSITÄT
DARMSTADT

Inhaltsverzeichnis

0.0.1	2
1 Einleitung	3
2 Theoretische Vorüberlegungen	4
2.1 Ein einfaches Modell für bistabile-Systeme	4
2.2 Mit Modulation, ohne Rauschen	5
2.3 Ohne Modulation, mit Rauschen	5
2.4 Mit Modulation, mit Rauschen	5
2.5 Charakteristische Größen	6
2.6 Versuchsaufbau	7
3 Durchführung	10
3.1 Schwellenspannung des Schmitt-Triggers	10
3.2 Verstärkungscharakteristik des Verstärkers	10
3.3 Kramers Rate des Schmitt-Triggers	10
3.4 Messreihen zur stochastischen Resonanz	10
4 Auswertung	12
4.1 Kramers Rate des Schmitt-Triggers	12
4.2 Überschwellige periodische Anregung	13
4.3 Resonanzkurve für verschiedene Rauschintensitäten	14
5 Fazit	19
6 Sourcecode	20

Erklärung zum fortgeschrittenen Praktikum

Hiermit versichern wir das vorliegende fortgeschrittenen Praktikum ohne Hilfe Dritter nur mit den angegebenen Quellen und Hilfsmitteln angefertigt zu haben. Alle Stellen, die aus Quellen entnommen wurden, sind als solche kenntlich gemacht. Diese Arbeit hat in gleicher oder ähnlicher Form noch keiner Prüfungsbehörde vorgelegen.

Johan Eggers

Nils Griebe

1 Einleitung

Gewöhnlich wird mit teuren Methoden versucht, Rauschen soweit wie möglich zu reduzieren. Bei diesem Versuch zur stochastischen Resonanz zeigt sich, dass bei nichtlinearen Systemen die Signalqualität durch Rauschen verbessert werden kann. Dies soll insbesondere in Hinsicht auf verschiedene Signalqualitätsmerkmale (Charakteristische Größen) in diesem Versuch untersucht werden.

2 Theoretische Vorüberlegungen

2.1 Ein einfaches Modell für bistabile-Systeme

Die stochastische Resonanz wird theoretisch durch folgendes einfaches einfaches Modell beschrieben: Man stelle sich die Bewegung eines Massenkörpers in einem Doppelmuldenpotential V_o vor, dessen Bewegung stark gedämpft wird ($-\gamma\dot{x}$). Zusätzlich ist das Teilchen einer periodische Modulation (V_m) ausgesetzt. Das Doppelmuldenpotential und die Verzerrung desselben durch die periodische Modulation fasst man zum effektiven Potential zusammen. Zuzüglich wirkt ein weisses, gaussförmiges Rauschen mit Mittelwert 0 und Intensität D auf das Teilchen ($\xi(t)$). Nach der Newtonschen Kraftgleichung und $F = -\nabla V$ lässt sich dann folgende Differentialgleichung aufstellen (Masse $m=1$):

$$1 * \ddot{x} = -\gamma\dot{x} - \frac{d}{dx}V_{eff}(x, t) + \xi(t)$$

wobei das effektive Potential

$$V_{eff} = V_o + V_m$$

$$V_{eff} = -\frac{1}{2}ax^2 + \frac{1}{4}bx^4 + A * \cos(\omega_{mod}t + \phi_o)$$

Dabei darf die Amplitude der Modulation nicht so groß werden, dass die Bistabilität des Doppelmuldenpotentials verloren geht. So wird gefordert:

$$A \ll \frac{2a^{3/2}}{\sqrt{27b}}$$

Sprünge von einer Mulde in die andere können somit nie durch die Modulation allein erfolgen. Erst das additionelle Rauschen ermöglicht Sprungdynamik.

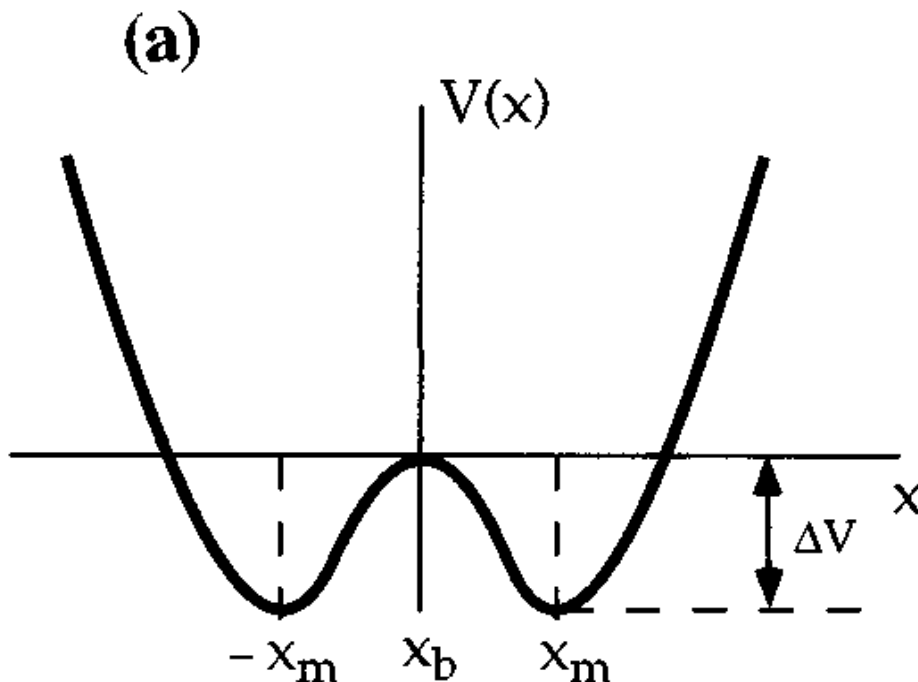


Abbildung 2.1: Doppelmuldenpotential

¹ soweit alles klar

Die Dynamik des Teilchens wird über adiabatische Elimination ($\ddot{x} = 0$) untersucht. Dabei wird angenommen, dass die Zeitdauer des Teilchens für Relaxationen sehr viel kleiner ist, als die Zeitdauer die vergeht, bis ein Sprung erfolgt (Zeitskalenseparation). Die oben festgesetzte Annahme großer Dämpfung γ im Vergleich zu $1 * \ddot{x}$ ist in dieser Vereinfachung begründet. Unter dieser Vereinfachung erhalten wir eine Gleichung, die über die Fokker-Planck Gleichung gelöst werden kann:

$$\dot{x} = -\frac{1}{\gamma} \frac{d}{dx} V_{eff}(x, t) + \frac{1}{\gamma} \xi(t)$$

Hierbei werden 3 Fälle unterschieden:

1. Antrieb erfolgt nur über die periodische Kraft
2. Antrieb ist Rauschen
3. Antrieb erfolgt über Rauschen und eine stochastische Kraft.

2.2 Mit Modulation, ohne Rauschen

Da die Modulationsamplitude so gewählt wurde, dass die Bistabilität nicht verloren geht, führt dieser „Antrieb“ zu gedämpften periodischen Bewegungen innerhalb einer Mulde des Doppelmuldenpotentials.

8	1	62	2	-206,143	7,363
5	0,2	63	2	-215,071	7,152
4	0,2	60	2	-206,143	7,152
2	0,2	36	2	-124	7,152
1,2	0,2	18	2	-61,143	7,152
0,2	0,15	10	2	-34,357	7,148

Tabelle 2.1: Hier die übertragene Tabelle

2.3 Ohne Modulation, mit Rauschen

Erfolgt die Anregung nur über das Rauschen gibt es Bewegungen innerhalb der Mulden aber es kann auch zu Übergängen kommen. Die Übergangsraten (r_K) wurden von Kramers 1940 gefunden:

$$r_K = r_+ = r_- = \frac{\omega_0 \omega_b}{2\pi\gamma} \exp\left(-\frac{\Delta V}{D}\right)$$

r_+, r_- bezeichnet die Übergangsrate von der rechten in die linke Mulde und umgekehrt. In unserem Fall sind sie durch die Potentialsymmetrie beide gleich. Für die Kreisfrequenzen gilt:

$$\omega_{0/b} = V''(x_{m/b})/m$$

2.4 Mit Modulation, mit Rauschen

Durch die Modulation ergeben sich zeitabhängige Verzerrungen des Doppelmuldenpotentials, sodass die Übergangsraten ebenfalls zeitabhängig und auch durch die gestörte Symmetrie nicht mehr gleich sind. Um diese zu berechnen wird die statische Potentialdifferenz in der Gleichung der Kramer-Raten einfach durch die zeitabhängige Potentialdifferenz ΔV_{dyn} ersetzt:

$$\Delta V_{dyn} = \Delta V \pm Ax_m \cos(\omega t + \phi)$$

$$r_{\pm}(t) = r_K \exp\left(\pm \frac{Ax_m}{D} \cos(\omega t + \phi)\right)$$

Hier findet sich die Ursache der stochastischen Resonanz: Durch die exponentielle Kopplung der Kramer-Raten und der periodischen Anregung kommt es über einen längeren Zeitraum betrachtet häufiger zu Übergängen zwischen den beiden Mulden, die synchron zur Anregung erfolgen. Es ist zu erwarten,

dass der Effekt dann am stärksten ausgeprägt ist, wenn die timescale matching condition erfüllt ist:

$$2T_k(D) = T(\omega) = \frac{2\pi}{\omega}$$

Wenn die Gesamtverweildauer in den beiden Mulden ($2T_k = 2 * 1/r_k$) genau gleich der Dauer ist, in der auch die Modulation erfolgt, ist die Wahrscheinlichkeit für ein Synchronisieren am größten, da nur hier eine längerwährende Sprungdynamik in Phase mit der Modulation erfolgen kann. Dies kann durch Anpassung der Rauschintensität bzw. der Modulationsfrequenz immer erfüllt werden.

2.5 Charakteristische Größen

Um die stochastische Resonanz quantitativ zu erfassen gibt es verschiedene charakteristische Größen, die hier kurz vorgestellt werden sollen:

1. Signal-Rausch-Verhältnis

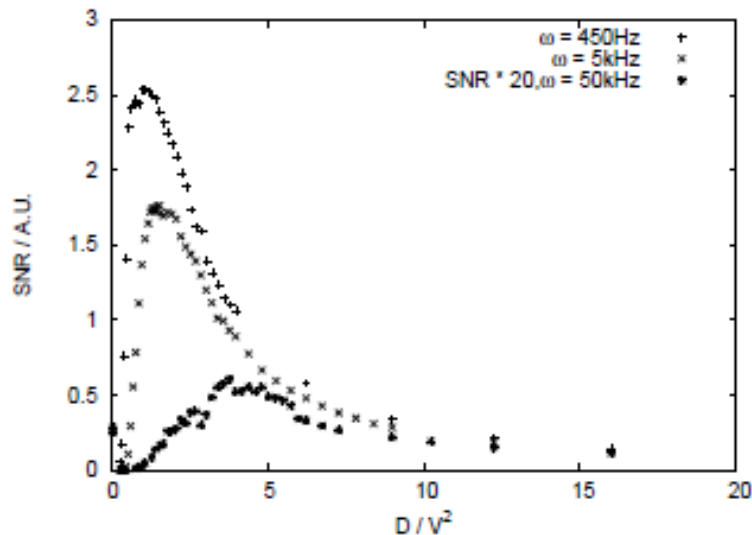


Abbildung 2.2: Verlauf der SNR als Funktion der Rauschintensität

Die Signal to Noise Ratio (SNR) ist der Quotient aus Signal- und Rauschintensitäten in Abhängigkeit zur Modulationsfrequenz:

$$SNR := \frac{S(\omega)}{N(\omega)}$$

Dabei erwarten wir bei der SR einen charakteristischen Verlauf (siehe Abbildung 2). Die SNR lässt sich auch theoretisch durch die lineare Antwort Theorie berechnen:

$$SNR_{theo} \propto \frac{(Ax_m)^2 r_k}{D(r_k^2 + w^2)}$$

2. Spektrale Leistungsverstärkung

Bei der spektralen Leistungsverstärkung (SPA) wird das Verhältnis der Eingangs- zur Ausgangsleistung gebildet:

$$SPA := \frac{P_{out}(\omega)}{P_{in}(\omega)}$$

Durch die SPA lässt sich die Verstärkung des Systems sehr gut ablesen. Auch hier werden charakteristische Kurven erwartet (siehe Abbildung 3).

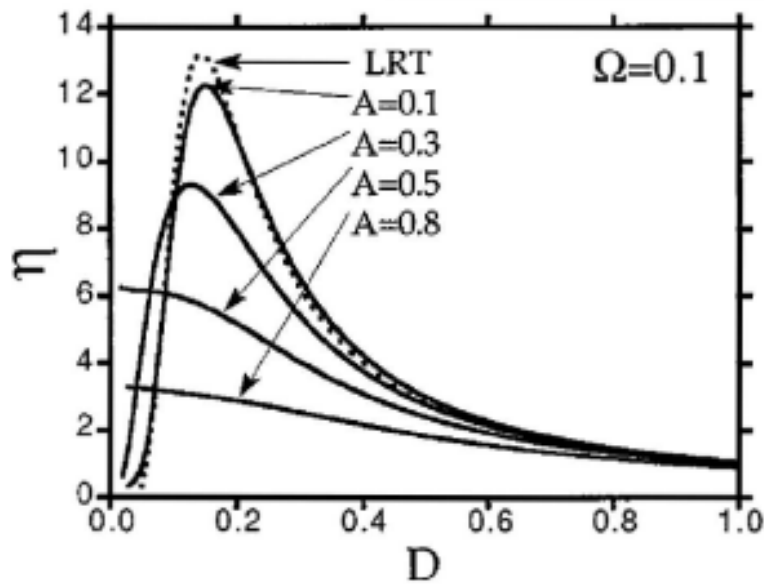


Abbildung 2.3: Verlauf der spektralen Leistungsverstärkung bei verschiedenen Modulationsamplituden

3. Verweildauer Die Verteilung der Verweildauer ist deswegen interessant, da die Synchronisation des Systems zwischen der schwachen Modulation und der Systemantwort ablesbar ist. Ohne Modulation ist die mittlere Verweildauer der Kehrwert der Kramers Rate. Da es ein statistischer Prozess ist, fällt die Häufigkeit für größere bzw. kleinere Verweildauern exponentiell ab.

Kommt eine Modulation hinzu, erwarten wir Spitzen der Häufigkeitsverteilung bei :

$$t_n = \frac{1}{2}T + nT, T = \frac{2\pi}{\omega}$$

wobei der Faktor $1/2$ durch die gleichförmige Doppelmuldensymmetrie des Systems verursacht ist.

2.6 Versuchsaufbau

Hier soll eine kurze Beschreibung des Experiments erfolgen. Das bistabile System ist ein Schmitt-Trigger, der bei Über- und Unterschreiten einer bestimmten Eingangsspannung von einem Zustand in den anderen springt, genauso wie unser Massenpunkt zwischen den Mulden hin und herspringt. Die Eingangsspannung setzt sich aus dem Rauschen sowie einem periodischen Signal zusammen. Das Rauschen wird durch einen Rauschgenerator erzeugt. Die Stärke wird durch einen nachgeschalteten Verstärker geregelt. Das periodische Signal wird durch einen Funktionsgenerator erzeugt. Über einen Addierer wird das Rauschen und das periodische Signal zusammengeführt. Die Reaktion des Schmitt-Triggers auf Rauschen und Modulation wird über PC ausgelesen und ausgewertet.

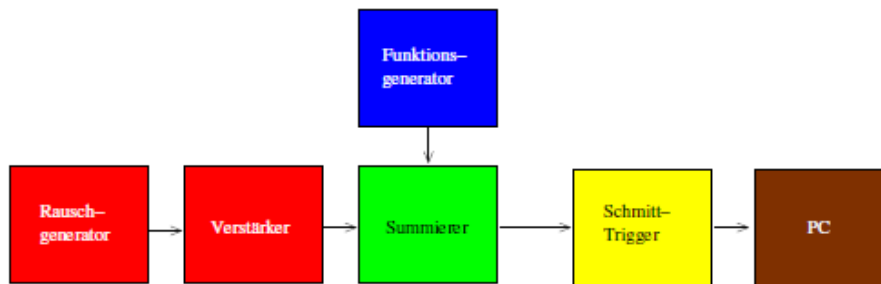


Abbildung 2.4: Schematischer Aufbau des Experiments

Im Folgenden ist noch der Schaltplan eines invertierenden Schmitt-Triggers sowie seine Antwort auf ein sinuoidales Eingangssignal dargestellt.

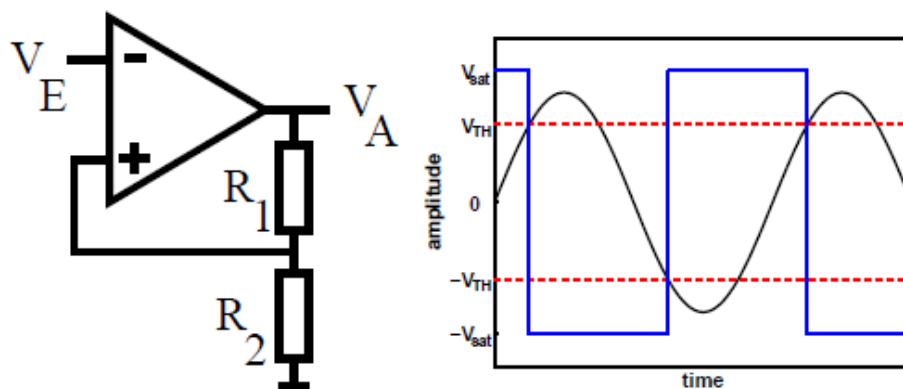


Abbildung 2.5: Schaltplan-Schmitt-Trigger sowie die Darstellung der Eingangs und Ausgangssignale. Dabei ist $\pm V_{sat}$ bzw. $\pm V_{TH}$ die Sättigungsspannung des Operationsverstärkers bzw. die Schwellspannung des Schmitt-Triggers

Beim Schmitt-Trigger verhält sich die Sättigungsspannung folgendermaßen zur Schwellspannung:

$$U_{Schw} = U_{Saett} * \frac{R_2}{R_1 + R_2}$$

Laut dem Datenblatt des verwendeten Operationsverstärkers AD711 kann man eine Sättigungsspannung von ca. 13 V bei einer Betriebsspannung von 15 V erwarten. Das Experiment soll mit einer Schwellspannung von 1 V betrieben werden. Folglich bietet sich die Verwendung von folgenden Widerständen an:

$$R_2 = 10k\Omega \text{ und } R_1 = 120k\Omega$$

Da die Widerstände fehlerbehaftet sind, und die Sättigungsspannung nicht exakt aus dem Datenblatt des OPV entnommen werden kann, rechnen wir mit Abweichungen von diesem theoretisch errechneten Wert.

Wie schon erwähnt soll das Rauschen durch einen Verstärker eingestellt werden. Dies geschieht über einen invertierenden Verstärker :

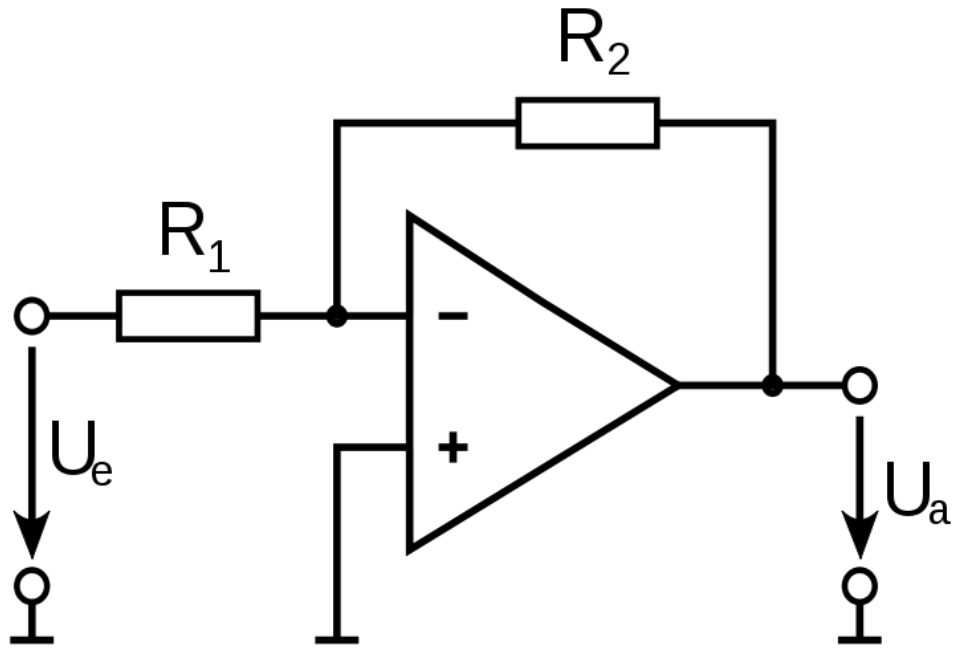


Abbildung 2.6: Invertierender Verstärker. Quelle: Wikipedia

Die Spannungsverstärkung ergibt sich zu:

$$\frac{U_a}{U_e} = -\frac{R_2}{R_1}$$

Der Rauschgenerator arbeitet mit einer Ausgangsspannung von 3.6 Volt. Dieses Signal soll auf einen Bereich von 0.5 bis 15 Volt verstärkt bzw. gedämpft werden. Folglich legen wir den Widerstand R_2 folgendermaßen variabel aus (Potentiometer):

$R_1 = 33\text{k}\Omega$ R_2 von ca. 130 k Ω bis 1 M Ω

3 Durchführung

3.1 Schwellenspannung des Schmitt-Triggers

Die Schwellenspannung des Schmitt-Triggers wurde experimentell und theoretisch ermittelt. Auf dem experimentellen Weg vermaßen wir die verbauten Widerstände des Schmitt-Triggers:

$$R_1 = 100k\Omega$$

$$R_2 = 10k\Omega$$

So ergibt sich bei einer anliegenden Sättigungsspannung von 8 V Peak to Peak (PP) wie in den theoretischen Vorüberlegungen zum Schmitt-Trigger ($U_{Schw} = U_{Saett} * \frac{R_2}{R_1+R_2}$) dargelegt eine Schwellenspannung von 0.72 V (PP). Experimentell vermaßen wir die obere und untere Schwellenspannung indem wir Sinusspannungen anlegten, deren Amplituden wir solange vergrößerten, bis Sprünge erfolgten. So ermittelten wir Amplitude von 0.69 V (PP) mit einer Offsetspannung von -0.0375 V. Dies liegt nahe an den theoretisch berechneten Werten. Im weiteren Experiment wurden die letzteren Werte, die sich als experimentell konkret richtig erwiesen hatten, verwendet.

3.2 Verstärkungscharakteristik des Verstärkers

Der Verstärkungsgrad des Verstärkers wurde ermittelt, in dem für 2 verschiedene Werte des Potentiometers (SKT¹.) die Ausgangsspannung des Verstärkers bei fester Eingangsspannung von 6.1 V gemessen wurde.

Ausgangsspannung	SKT
6 V	1
2 V	0.32

Tabelle 3.1: Verhältnis Skalenteile (SKT) des Potentiometers zur Ausgangsspannung des Verstärkers bei konstanter Eingangsspannung von 6.1 Volt

Durch diese beiden Messwerte lässt sich mit kleinen Abweichungen (ca. 0.1 Volt) eine Ursprungsgerade legen mit folgender Parametrisierung:

$$Ausgangsspannung = SKT * Eingangsspannung$$

3.3 Kramers Rate des Schmitt-Triggers

Die Kramers-Raten wurden experimentell durch ein variables Rauschen, das an den Eingang des Schmitt-Triggers angelegt wurde, ermittelt. Der Frequenzgenerator wurde auf die Ausgabe der konstanten Offsetspannung von -0.0375 V eingestellt. Das Verhalten des Triggers wurde im gesamten Experiment mit einer Samplingfrequenz von 300000 Hz für einige Sekunden abgetastet.

3.4 Messreihen zur stochastischen Resonanz

Außerdem wurde der Schmitt Trigger einem überschwelligen Sinussignal mit einer Amplitude von 1.7 V (+Offsetspannung) ausgesetzt. So wird in der Auswertung im Antwortfrequenzverlauf der erwartete

¹ Die tatsächlichen Skalenteile des Potentiometers betragen im Versuch die hier notierten mit Faktor 10 multipliziert, die erfolgte Umskalierung bietet sich aus Gründen der Skalierung an

T/2 Peak ermittelt werden. Zur direkten Beobachtung der stochastischen Resonanz wurden weitere 2 Messreihen (200Hz + 1000Hz) mit einem unterschwelligen Sinus-Signal von mit Amplitude von 400 mV bei verschiedenen Rauschintensitäten aufgenommen.

4 Auswertung

4.1 Kramers Rate des Schmitt-Triggers

Wie im Teil Durchführung beschrieben wurde zur Bestimmung der Kramersrate der Frequenzgenerator so eingestellt, dass er die konstante Offsetspannung liefert, die genau in der Mitte der beiden Schwellenspannungen des Schmitt-Triggers liegt. Nun werden 10 Messungen zu verschiedenen Potentiometer-einstellungen durchgeführt, aus denen dann die Kramer-Raten ermittelt werden. Im nachfolgenden sind diese Resultate aufgelistet.

Potti-Einstellung	Kramers-Rate
0.1	0
0.2	172.2
0.3	3117.6
0.4	9340.81
0.5	15540
0.6	20736.3
0.7	25212
0.8	29137.5
0.9	32494.2
1.0	35601.6

Nun soll der funktionale Zusammenhang $r_k(D) \propto e^{-\frac{\Delta V}{D}}$ überprüft werden. Dazu werden die Daten aus der oben stehenden Tabelle an die Funktion $f(x) = ae^{-b/x}$ mit gnuplot angefitet. Für a und b ergibt sich daraus:

$$a = 87491.1$$

$$b = 8.83951$$

Der nachfolgende Plot zeigt die experimentell ermittelten Kramersraten aufgetragen gegen die Potti-Stellung, sowie die angefitete Funktion $f(x)$.

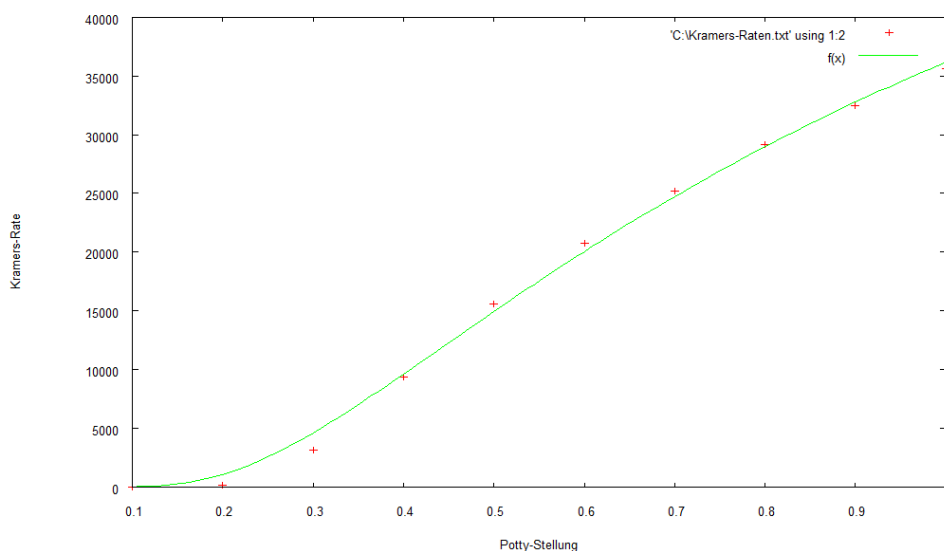


Abbildung 4.1: Kramers-Raten in Abhängigkeit der Poti-Stellung (Rauschstärke)

Offenbar kann die Theorie die experimentell ermittelten Werte gut reproduzieren. Diese Daten werden nun verwendet um die optimale Rauschintensität nach der timescale matching condition für die Frequenzen 200Hz und 1000Hz zu ermitteln. Dazu muss die Gleichung $\frac{z}{r_k} = 1/f \Leftrightarrow r_k = 2 \cdot f$ erfüllt sein. Um dies mit möglichst guter Genauigkeit zu ermitteln, wird die oben angegebene Funktion $f(x)$ noch einmal an die Datenpunkte angefügt, diesmal nur für den Bereich der Poti-Stellungen 0.0-0.5. Dazu ergibt sich:

$$a = 87491.1$$

$$b = 0.92520$$

Aus der Gleichung ergibt sich nun die Resonanz für die Poti-Stellung 0.17172 (200Hz) und 0.244 (1000Hz).

4.2 Überschwellige periodische Anregung

Für die überschwellige periodische Anregung ergaben sich scharfe Peaks in der Frequenz und Verweildauer-Verteilung. Für 200 Hertz liegt der T/2-Peak bei $2.51 \cdot 10^{-3}s$ (Theoretisch ergibt sich $2.50 \cdot 10^{-3}s$), der Peak im Frequenzspektrum liegt bei 200.4Hz. Für 1000 Hertz liegt der T/2-Peak bei $5.033 \cdot 10^{-4}s$ (Theoretisch ergibt sich $5 \cdot 10^{-4}s$), der Peak im Frequenzspektrum liegt bei 1000.2Hz.

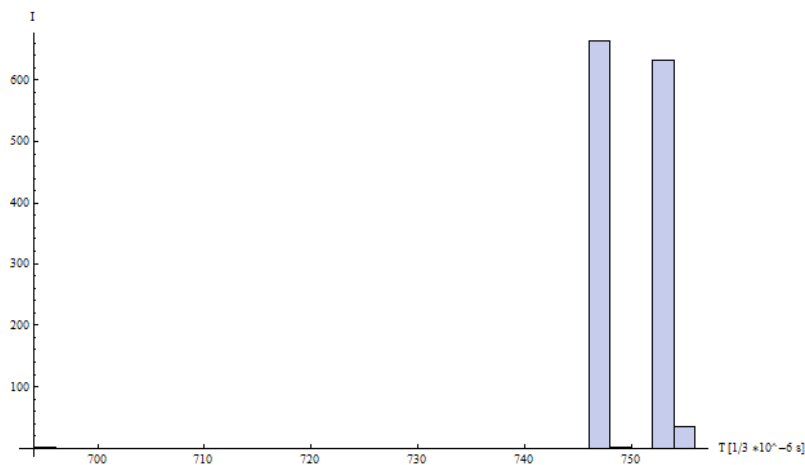


Abbildung 4.2: Verweildauer-Verteilung 200Hz Überschwellig

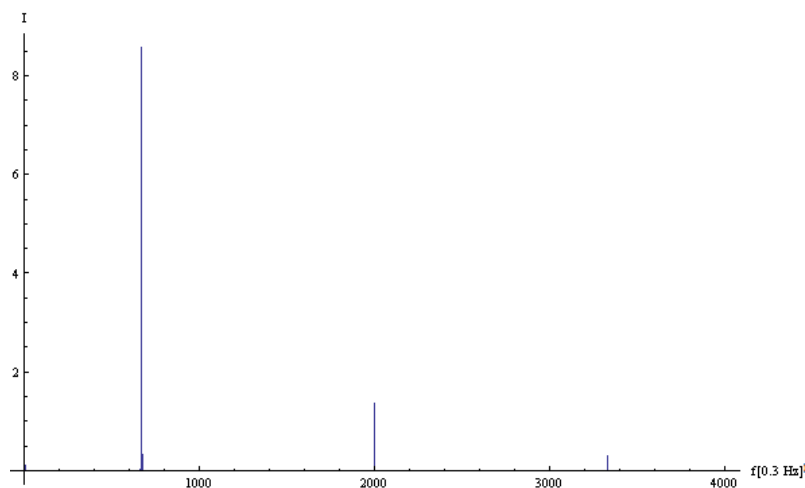


Abbildung 4.3: Frequenz-Verteilung 200Hz Überschwellig

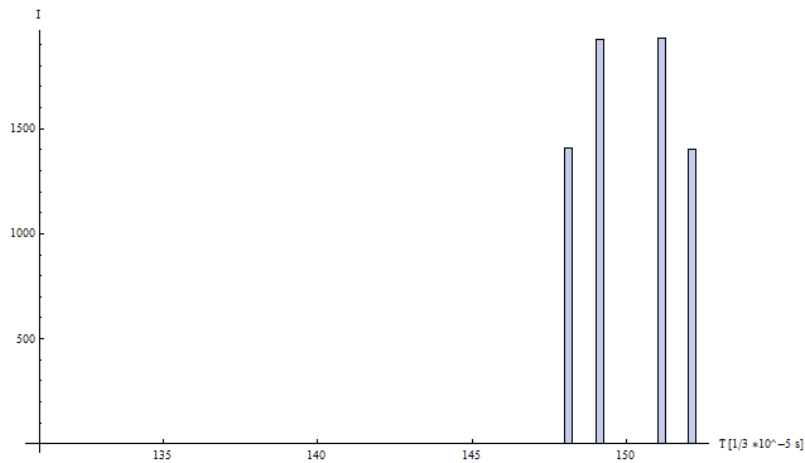


Abbildung 4.4: Verweildauerverteilung 1000Hz Überschwellig

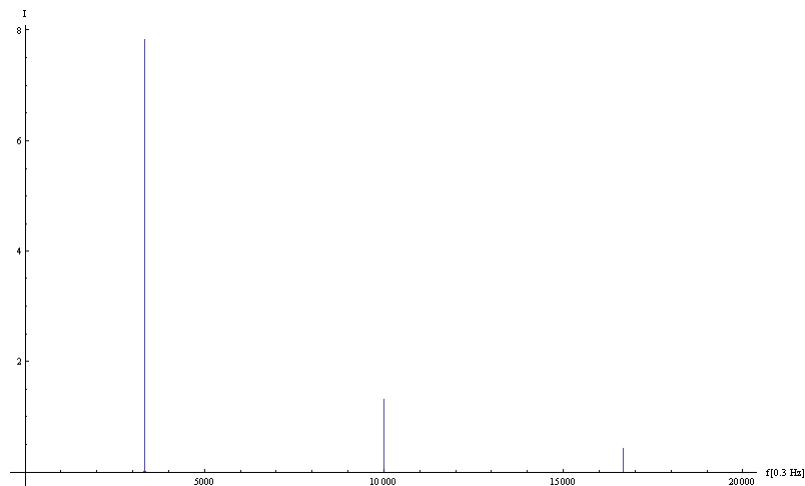


Abbildung 4.5: Frequenzverteilung 1000Hz Überschwellig

4.3 Resonanzkurve für verschiedene Rauschintensitäten

Die Resonanzversuche führten wir mit Frequenzen von 200Hz und 1000Hz durch. Dabei variierten wir die Potistellung nahmen die Daten auf und errechneten daraus das Signal-Rausch Verhältnis (SNR), die Spektrale Leistungsverstärkung(SPA) sowie die Fläche unter dem größten Peak der Verteilung der Verweildauern, wobei wir hierbei die größte Verweildauer nahmen und in einem Bereich von $\pm 40\%$ um diesen Maximalwert die Verteilung der Verweildauern integrierten(im folgenden immer mit Integral unter Peak oder I-Peak benannt).reich von $\pm 40\%$ um diesen Maximalwert die Verteilung der Verweildauern integrierten(im folgenden immer mit Integral unter Peak oder I-Peak benannt). Diese Ergebnisse sind in den nachfolgenden Tabellen für beide Frequenzen dargestellt:

Poti-Einstellung	I-Peak	SNR	SPA
0.13	0.83	976.087	3.958
0.15	0.96	5670.19	7.153
0.17	0.99	9801.32	7.564
0.2	0.99	10199.8	7.851
0.23	0.91	9591.65	7.473
0.3	0.08	11454.7	7.416
0.4	0.14	15454.3	5.575
0.5	0.21	11002.6	3.84
0.6	0.21	9908.49	2.709
0.7	0.25	6551.06	1.884
0.8	0.29	6046.36	1.365
0.9	0.32	4508.5	0.9966
1.0	0.35	3997,48	0.7649

Abbildung 4.6: Charakteristische Größen für 200Hz Anregung

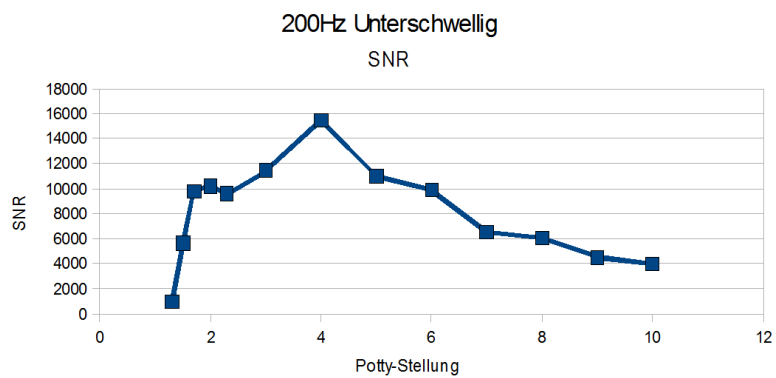


Abbildung 4.7: SNR 200Hz

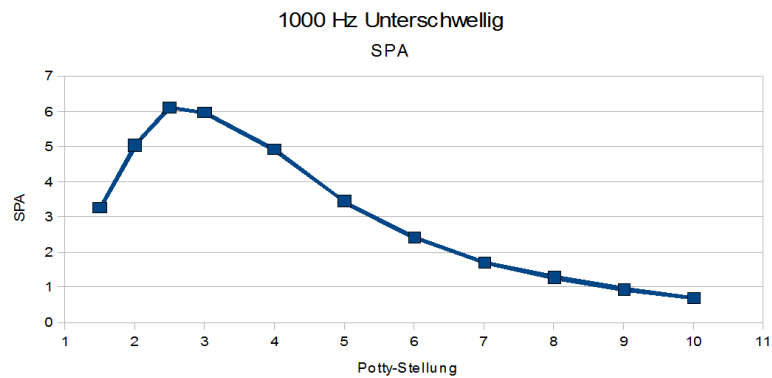


Abbildung 4.8: SPA 200Hz

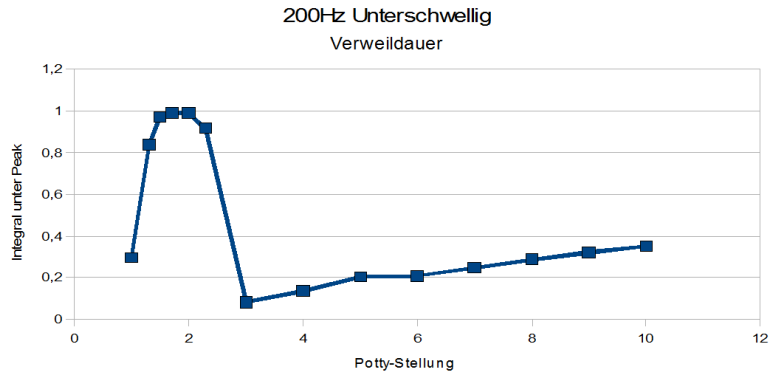


Abbildung 4.9: Verweildauer 200Hz

Poti-Einstellung	I-Peak	SNR	SPA
0.1	0.13	0.3	9.991
0.15	0.6	0.3	3.27
0.2	0.88	8361.61	5.05
0.25	0.91	15437	6.11
0.3	0.76	17213.1	5.978
0.4	0.09	17193.6	4.933
0.5	0.2	13493	3.446
0.6	0.21	10714.3	2,427
0.7	0.25	8743.37	1.7
0.8	0.28	6835.64	1.28
0.9	0.32	5432.99	0.9487
1.0	0.35	4485.5	0.6935

Abbildung 4.10: Charakteristische Größen für 1000Hz Anregung

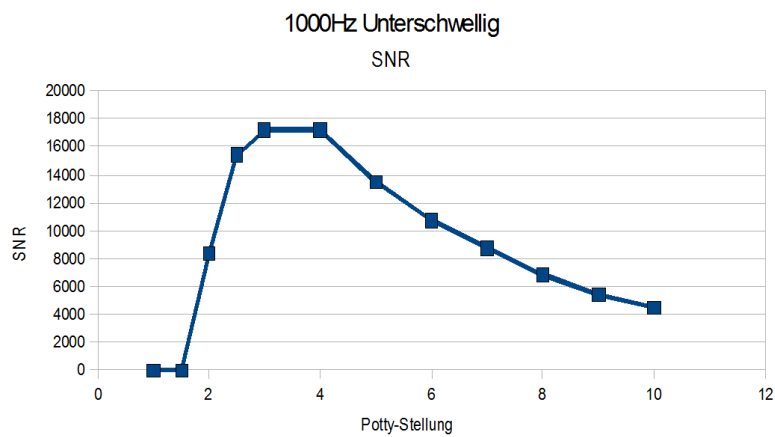


Abbildung 4.11: SNR 1000Hz

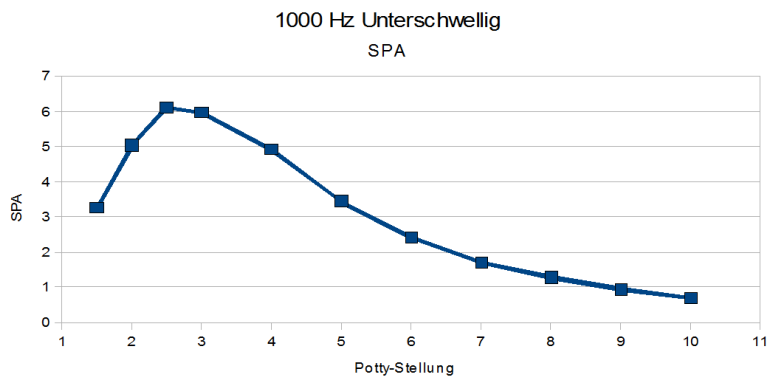


Abbildung 4.12: SPA 1000Hz

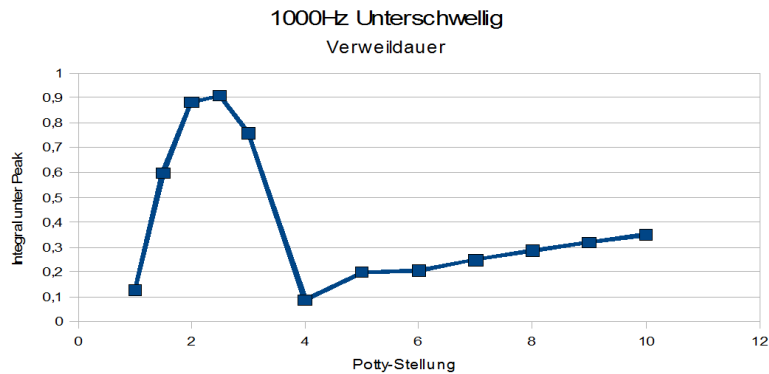


Abbildung 4.13: Verweildauer 1000Hz

Anhand der Maximalwerte in den jeweiligen Spalten(I-Peak, SNR,SPA) kann man nun ablesen bei welcher Poti-Stellung der Resonanzfall nach den verschiedenen Kriterien eintritt. Dies ist in der nachfolgenden Tabelle aufgelistet:

	I-Peak	SNR	SPA	timescale matching condition
Resonanz für 200Hz	0.17-0.2	0.3-0.4	0.17-0.2	0.17172
Resonanz für 1000Hz	0.2-0.25	0.3-0.4	0.25-0.3	0.244

Abbildung 4.14: Poti-Stellungen für den Resonanzfall

Aus der Tabelle wird ersichtlich, dass es Schwankungen zwischen den verschiedenen charakteristischen Größen gibt. Der deutlichste Ausreißer ist die Bestimmung des Resonanzfalls bei 200Hz. Dieses Kriterium scheint für diese Frequenz nicht richtig zu funktionieren. Auch die SPA hätte für beide Frequenzen ihr Maximum bei einer die Potistellung von ca. 0.1. Dieser Maximalwert steht aber in beiden Fällen alleine und fällt zum nächsten Messpunkt sehr stark ab, weswegen wir annehmen, dass es sich hierbei um ein Versagen des Kriteriums bei sehr kleiner Rauschintensität handelt.

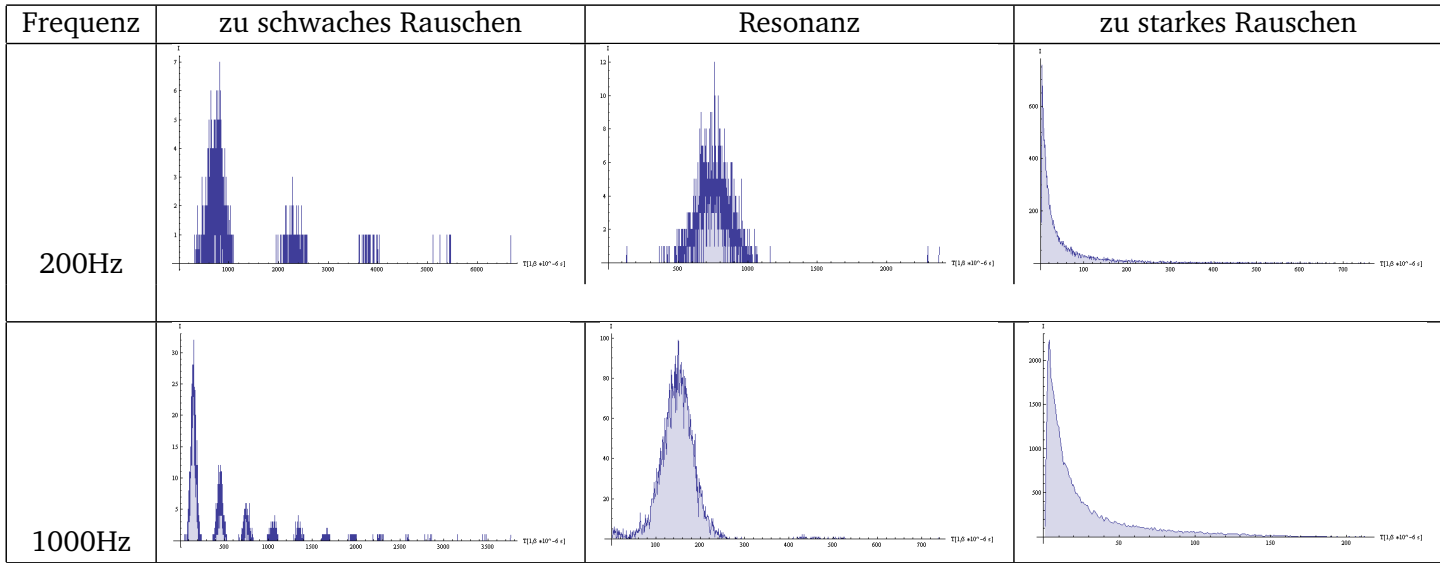


Abbildung 4.21: Verweildauervertellungen für verschiedene Fälle

5 Fazit

In diesem Experiment konnten die theoretischen Aussagen der stochastischen Resonanz grundsätzlich verifiziert werden. Die experimentell ermittelten Verläufe von SNR/SPA bzw. den Häufigkeitsverteilungen entsprachen den theoretisch erwarteten; so konnte auch der Verlauf der Kramersraten gut durch die im Theorieteil erläuterte Gleichung beschrieben werden. Außerdem wurde insbesondere klar, dass zur Beschreibung von Resonanzphänomenen verschiedene charakteristische Größen notwendig sind, da diese nicht immer genau zu den selben Ergebnissen führen, wie im Vergleich der I-Peak/SNR/SPA/TMC deutlich wurde.

6 Sourcecode
