

Holographie

Tim Dombrowe
Kirill Boguslavski
Betreuer: Stefan Breuer

19.04.2011

Contents

1	Einleitung	1
2	Grundlagen	2
2.1	Wellenfelder	2
2.2	Laser	3
2.3	Holographie	5
2.4	Abschätzung der Anzahl der Lasermoden im He-Ne-Laser	7
2.5	Berechnung der Kontrastfunktion bei mehreren Lasermoden	8
3	Versuchsaufbau und Durchführung	11
3.1	Versuchsdurchführung	11
3.2	Raumfilter und Abschätzung der Beugungsordnungen	13
4	Auswertung	13
5	Fazit	14

1 Einleitung

Mit der Entdeckung der Holographie 1947 durch Dennis Gábor, zu der er 23 Jahre später mit dem Nobelpreis ausgezeichnet wurde, fing eine neue Epoche der Optik an (genauer: nach der Erfindung des Lasers). Eine theoretisch so simple und in ihrer Einfachheit geniale Technik ermöglicht es, Bilder dreidimensional zu rekonstruieren. Heutzutage gibt es viele Anwendungen der Holographie, z.B. im alltäglichen Gebrauch wie in Geschäften, in der Medizin oder in der Unterhaltungsindustrie, und diese benutzen das Prinzip der Holographie auf unterschiedliche Weise.

2 Grundlagen

2.1 Wellenfelder

Physikalische Eigenschaften von Lichtwellen

Lichtwellen sind elektromagnetische Wellen. Sie bestehen aus Photonen. Als Lichtwellen werden die elektromagnetischen Wellen bezeichnet, deren Wellenlänge zwischen $10^{-5}m$ und $10^{-8}m$ liegt. Sie bewegen sich mit Lichtgeschwindigkeit fort ($c \approx 3 \cdot 10^8$ m/s). Lichtwellen sind somit nur ein kleiner Teil elektromagnetischer Wellen.

Da Lichtwellen sowohl Wellen, als auch Photonen (Teilchen) sind, besitzen sie beide Eigenschaften des jeweiligen Zustands. Sie haben einen Impuls (Strahlungsdruck) und werden an kleinen Öffnungen "gebeugt". Als Welle besitzen sie die Eigenschaft, zu interferieren. So können sich Lichtwellen verstärken oder abschwächen.

Lichtwellen werden beim Übergang von optisch unterschiedlich dichten Medien reflektiert.

Mathematische Beschreibung einfacher Wellenfelder (ebene Welle, Kugelwelle)

Der einfachste Fall ist die ebene Welle. Sie lässt sich allgemein so beschreiben:

$$y(t) = Ae^{i(\omega t - kx)}$$

Eine ebene Welle besitzt nur eine Ausbreitungsrichtung.

Kugelwellen lassen sich auf ähnliche Weise beschreiben. Dabei muss beachtet werden, dass es sich nun um ein radiales Problem handelt. Daraus folgt:

$$y(t, r) = \frac{A}{r} e^{i(\omega t - kr)}$$

Huygens-Fresnel'sches Prinzip

Es besagt, dass jeder Punkt einer Wellenfront selbst Ausgangspunkt einer Elementarwelle (Kugelwelle) ist. Die neue Wellenfront ist die Einhüllende über alle neu gebildeten Elementarwellen.

Kohärenz

Es gibt zwei Arten der Kohärenz: die zeitliche und die örtliche Kohärenz. Wellen sind zeitlich kohärent, wenn sie in Phase und Wellenlänge überein stimmen. Sie sind örtlich kohärent, wenn sie die gleiche Ausbreitungsrichtung besitzen. Kohärentes Licht kann z. B. mit einem Laser erzeugt werden.

Interferenz von Wellen

Als Interferenz von Wellen bezeichnet man die Überlagerung von einzelnen Wellen. Dabei kann es zu konstruktiver oder destruktiver Interferenz kommen. Die resultierende Welle ist eine Summe der einzelnen Wellen.

Zweistrahleninterferenz

Für die Überlagerung von zwei Wellen mit kohärentem Licht gilt für ihre Amplitude:

$$A_1 = A_0 \sin(\omega t)$$

$$A_2 = A_0 \sin(\omega t + \varphi)$$

$$A_{ges} = A_1 + A_2 = 2A_0 \cos\left(\frac{1}{2}\varphi\right) \sin\left(\omega t + \frac{1}{2}\varphi\right)$$

und für die Intensität:

$$I = |A_1 + A_2|^2 = 4I_0 \cos^2\left(\frac{1}{2}\varphi\right) \sin^2\left(\omega t + \frac{1}{2}\varphi\right)$$

Dabei wurde ein Additionstheorem (s. [2] S. 82) benutzt.

2.2 Laser

Aufbau eines Lasers

Ein Laser besteht aus zwei Elementen. Dem Medium, indem das Licht erzeugt wird und dem Resonator. Das Medium kann aus unterschiedlichen Materialien bestehen. Der Resonator besteht aus zwei Spiegeln, der eine vollständig reflektierend, der andere halb durchlässig. Sie werden gegenüber voneinander in einem für das erzeugte Licht charakteristischen Abstand d angebracht. Es gilt: $2d = n\lambda = n\frac{c}{f_n}$, damit konstruktive Interferenz zwischen den Teilstrahlen stattfindet und sich damit eine stehende Welle bilden kann. Folglich gilt für den Modenabstand (Erklärung s. unten) $\Delta f = f_{n+1} - f_n = \frac{c}{2d}(n+1 - n) = \frac{c}{2d}$.

Moden in einem Resonator

Bei konstruktiver Interferenz im Resonator bilden sich Moden. Diese treten sowohl longitudinal als auch transversal auf. Die transversalen Moden kommen daher, dass die einzelnen Wellen geringfügig unterschiedliche Strecken zurücklegen im Resonator.

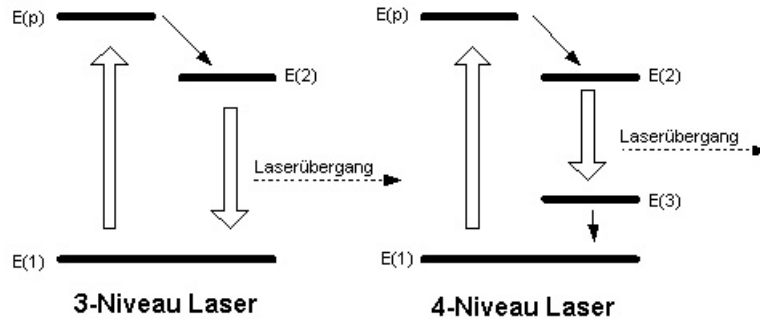


Figure 1: 3- und 4-Niveau Laser

Besetzungsinversion

Als Besetzungsinversion wird die Besetzung eines höheren Quantenzustands als den Grundzustand bezeichnet. Um einen solchen Zustand zu erreichen, muss man dem System Energie zufügen. Ein System besitzt häufig mehrere dieser höheren Zustände. Sie sind von unterschiedlicher Lebensdauer, was man sich bei einem Laser zu nutze macht.

Funktionsweise eines Lasers

Es gibt viele unterschiedliche Arten von Lasern. Die beiden wichtigsten sind 3- und 4-Niveau Laser (s. Abb. 1). Bei dem 3-Niveau Laser haben wir drei Zustände des Systems. Den Grundzustand E_1 , einen kurzlebigen hochenergetischen Zustand E_p und einen langlebigen Zustand E_2 der knapp unter dem langlebigen liegt. Wird ein Elektron nun angeregt, so wird es in den E_p Zustand gehoben, fällt aber schnell auf E_2 darunter. So werden immer mehr Elektronen aus E_1 nach E_2 transportiert, bis in E_2 mehr Elektronen sind als im Grundzustand. Fällt nun ein Elektron von E_2 auf E_1 ab kommt es einerseits zur spontanen Emission eines Photons mit charakteristischer Wellenlänge, andererseits löst es eine "Lawine" von Elektronen aus, die sich aus E_2 nach E_1 bewegen. Dadurch entstehen viele Photonen gleicher Energie und Ausbreitungsrichtung zur gleichen Zeit. Durch den Resonator wird das Licht noch einmal verstärkt.

Beim 4-Niveau Laser gibt es noch einen 4. kurzlebigen Zustand E_3 , der kurz über dem Grundzustand liegt.

He-Ne-Laser

Bei einem Helium-Neon-Laser nutzen wir aus, dass der angeregte Zustand des He auf ähnlichem Niveau liegt wie der 3s Zustand des Ne. So können wir die Energie vom angeregten He auf das Ne übertragen. Dabei kommt es zu einer

Besetzungsinversion. Bei einem He-Ne-Laser handelt es sich um einen 4-Niveau Laser.

2.3 Holographie

Fresnelsche Zonenplatte

Wir betrachten eine Ebene und einen Punkt, der im Abstand r_0 von der Ebene entfernt ist. Nun sollen die Punkte auf der Ebene zu Zusammenhangskomponenten zusammengefasst werden, die dadurch charakterisiert sind, dass alle ihre Strahlen, die nach dem Huygens'schen Prinzip emittiert werden, in P entweder konstruktiv oder destruktiv interferieren. Dies ergibt eine Anordnung von konzentrischen Kreisen, deren Radien mit wachsendem Gangunterschied schwächer nach außen anwachsen und die Fresnelzonen genannt werden. Diejenigen Zonen, die zu einer destruktiven Interferenz in P führen würden, werden entweder abgedunkelt, sodass sie die destruktiven Strahlen absorbieren, oder durch $\lambda/2$ -Platten ersetzt, die die Phasen der Strahlen um 180° verschieben. Auf diese Weise interferieren die Strahlen in P maximal konstruktiv und P kann als Brennpunkt betrachtet werden. Im Grunde genommen, ist es ein Beugungsphänomen an einem konzentrischen Gitter in der Ebene und es ist ein Spezialfall in der Holographie, und zwar die Abbildung eines Punktes bei einer ebenen Referenzwelle.

Aufnahme und Rekonstruktion

Die Aufnahme eines Hologramms erfolgt durch die Interferenz zweier kohärenter Strahlen: dem vom Objekt ausgehenden Objektstrahl und dem Referenzstrahl. Um die nötige zeitliche und räumliche Kohärenz zu erhalten, wird normalerweise Laserlicht verwendet, das durch eine Aufweitungsoptik, Strahlteiler, Spiegel und durch andere optische Instrumente in diese zwei Teilstrahlen aufgebrochen wird. Betrachten wir nun die Interferenz dieser beiden Strahlen. Sei die Referenzwelle zunächst eine ebene Welle, die senkrecht auf die Fotoplatte trifft, und die Objektwelle eine Kugelwelle mit Mittelpunkt P, der sich auf der anderen Seite der Platte befindet, das heißt, wir möchten ein Hologramm des Punktes P erstellen. Dies ist der genannte Spezialfall einer Fresnel'schen Zonenplatte, das heißt, wir wissen, dass sich ein konzentrisches Interferenzbild ergibt. Dieses wird auf der Fotoplatte aufgenommen, und es entsteht neben der normalen Amplitudenunterschiede (falls eine Amplitudenmodulation existiert), wie sie auf einer konventioneller (schwarz-weiß) Fotografie zu finden sind, eine phasenmodulierte Intensitätsverteilung, die bei der Rekonstruktion des Objekts wie ein Beugungsgitter wirkt. Bestrahlt man also die Platte mit einer ebenen, wieder senkrecht einfallenden Welle der gleichen Frequenz (Rekonstruktionswelle), so wird der Strahl (teilweise) auf der anderen Seite wie bei einer Sammellinse im Brennpunkt gebündelt, wodurch ein reelles Bild entsteht. Blickt man der Referenzwelle entgegen, sieht man ein weiteres, diesmal virtuelles Bild eines Punktes auf der anderen Seite der Fotoplatte. Hier wirkt die Hologrammplatte als Zerstreuungslinse.

Mathematisch lässt sich die Rekonstruktion hinter der Hologrammplatte als Summe von drei (allgemein vier) Teilwellen formulieren: der geschwächten Rekonstruktionswelle, der geschwächten Objektwelle und einer zu ihr konjugiert-komplexen Welle (falls Rekonstruktions- und Referenzwelle nicht identisch sind, ergeben sich statt der einen Rekonstruktionswelle zwei verschiedene Teilstrahlen und die Bilder der Objekte werden verschoben). Die beiden Objektwellen ergeben gerade die beiden Bilder unseres ursprünglichen Punktes. Bleiben wir noch bei diesem Beispiel und strahlen die ebene Referenzwelle von einem anderen Winkel aus auf die Platte, dann werden die konzentrischen Kreise zu Ellipsen, nimmt man statt einer ebenen eine Kugelwelle als Referenz, so ergeben sich weitere Kegelschnitte als Interferenzmuster (wenn man die Platte relativ zur Verbindungsgeraden der Mittelpunkte gedreht hält) und es können ein zwei reelle, zwei virtuelle Bilder oder ein reelles und ein virtuelles Bild entstehen.

Strahlungsgesetz

Betrachten wir die Lage der Mittelpunkte der kugelförmigen Referenz- und Rekonstruktionswelle, dann ergibt sich ein Abbildungsgesetz, das ähnlich dem Linsengesetz aufgebaut ist (Gegenstands- und Bildweiten sind jeweils die Radien der Kugelwellen, der Brennpunkt ergibt sich aus den Radien von Referenz- und Objektwelle). Sind die z_i die Abstände der Mittelpunkte zur Platte, so ergibt sich

$$\left(\frac{1}{z_B} - \frac{1}{z_C} \right)_{1,2} = \pm \left(\frac{1}{z_G} - \frac{1}{z_R} \right) = \pm \frac{1}{f} \quad (1)$$

(aus Versuchsanleitung). R bezeichnet die Referenz-, G die Objekt-, C die Rekonstruktion- und B die Bildwelle. Die z-Achse steht hierbei senkrecht auf der Fotoplatte und zeigt in diejenige Richtung, in die die sich senkrecht zur Fotoplatte befindende Komponente der Referenzwelle propagiert. Es entstehen zwei Bilder (zwei Vorzeichen rechts in der Gleichung) und sie können je nach Vorzeichen reell oder virtuell sein (reell bei positivem, virtuell bei negativem Vorzeichen).

Fotographische Platte und Beugungsordnungen

Eine herkömmliche Fotoplatte besteht aus einem Gel, in dem lichtsensitive Silberhalogenide enthalten sind. Bei Lichteinstrahlung zerfallen diese und die Silberkristalle ergeben die intensitätsabhängige Schwärzung des Films. Allerdings existieren auch andere Aufnahmematerialien, die ihre Vor- und Nachteile bei Aufnahme und Rekonstruktion haben. Dabei geht es um den Kontrast der Abbildung, die Schärfe, die Intensität und vor allem darum, inwieweit der dynamische Bereich der Schwärzung der photographischen Schicht erfüllt ist. Denn in diesem Bereich gilt eine lineare Beziehung zwischen der Belichtung (definiert als Produkt zwischen Belichtungszeit und Intensität der Strahlung) und der Amplitudentransparenz, wobei diese das Verhältnis der durchgelassenen Amplitude zur eingestrahnten Amplitude (der Rekonstruktionswelle) auf das Hologramm ist. Genau in diesem Bereich existieren Bilder der ± 1 . Beugungsordnung

(genau die beiden Bilder, wie oben erklärt). Verlässt man diesen dynamischen Bereich, existieren weitere Bilder, also weitere Beugungsordnungen, die je nach Anwendung störend oder gewollt sein können. Mathematisch ergeben sich neben den Objektwellenfeldern weitere Wellenfelder quadratischer Ordnung, falls wir für die Beziehung zwischen der Amplitudentransparenz und der Belichtung (als Störungsterm) eine quadratische Funktion ansetzen.

Außerdem ist ein großer Unterschied zur Fotografie, dass jede Stelle des Hologramms im Prinzip die Information des ganzen Objekts enthält, sodass bei Beschädigung der holographischen Platte das Bild prinzipiell rekonstruiert werden kann.

Hologrammtypen

Es gibt verschiedene Hologrammtypen: Flächenhologramme zeichnen die Bilder nur auf ihrer Oberfläche auf, während Volumenhologramme die Information auch innerhalb der fotografischen Platte speichern. Bei der Rekonstruktion wird dann an Bragg-Ebenen gebeugt, wir haben also ein dreidimensionales Gitter. Als nächstes wird zwischen Amplituden- und Phasenhologrammen unterschieden. Während Amplitudenhologramme nach dem Prinzip der Fresnelschen Zonenplatte funktionieren (die Schwärzung wird durch Amplituden- und Phasenmodulation verändert, die Platte ist planar), haben Phasenhologramme überall die gleiche Schwärzung, allerdings eine raue Oberfläche, sodass bei ihnen der von der Luft abweichende Brechungsindex als Gangunterschieds- und damit Phasenmodulator benutzt wird.

2.4 Abschätzung der Anzahl der Lasermoden im He-Ne-Laser

Da die Moleküle im Laser eine Geschwindigkeit aufgrund der endlichen Temperatur haben, ist das Licht, das sie ausstrahlen, dopplerverbreitert. Die Formel für einen mit v bewegten Sender S und einen ruhenden Beobachter B lautet

$$f_B = \frac{f_s}{1 - \frac{v}{c}}$$

Umgeformt ergibt es $v = c \left(\frac{f_B}{f_s} - 1 \right)$. Nun wissen wir auch, dass die Geschwindigkeit Boltzmann-verteilt ist, also gilt für eine eindimensionale Verteilung (es ist nur die Geschwindigkeit entlang der optischen Achse wichtig):

$$\tilde{p}(v) = \sqrt{\frac{m_M}{2\pi k_B T}} \exp\left(-\frac{m_M v^2}{2k_B T}\right)$$

woraus die Verteilung in Abhängigkeit der Beobachterfrequenz folgt

$$p(f_B) = \sqrt{\frac{m_M}{2\pi k_B T}} \exp\left(-\frac{m_M c^2}{2k_B T} \left(\frac{f_B}{f_s} - 1\right)^2\right)$$

Diese Verteilung ist symmetrisch um $f_B = f_S$ und hat hier ihr Maximum. Um nun die Halbwertsbreite f_{FWHM} der Frequenzverteilung zu bestimmen, die wir zur Abschätzung der Anzahl der Moden brauchen, stellen wir auf, dass für die Halbwertsbreite gelte

$$\frac{p(f_S)}{2} = p\left(f_S - \frac{f_{FWHM}}{2}\right)$$

Hieraus folgt

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}\sqrt{\frac{m_M}{2\pi k_B T}} &= \sqrt{\frac{m_M}{2\pi k_B T}} \exp\left(-\frac{m_M c^2}{2k_B T} \left(\frac{f_S - \frac{f_{FWHM}}{2}}{f_S} - 1\right)^2\right) \\ &= \sqrt{\frac{m_M}{2\pi k_B T}} \exp\left(-\frac{m_M c^2}{2k_B T} \left(\frac{f_{FWHM}}{2f_S}\right)^2\right) \end{aligned}$$

und daraus

$$f_{FWHM} = 2f_S \sqrt{\frac{2k_B T}{m_M c^2} \ln 2} = \frac{2c}{\lambda_S} \sqrt{\frac{2k_B N_A T}{M c^2} \ln 2} = \frac{2}{\lambda_S} \sqrt{\frac{2RT}{M} \ln 2} = 2390 \text{ MHz}$$

Dabei ist m_M die Teilchenmasse und $M = 20,18 \frac{\text{g}}{\text{mol}}$ die Molmasse von Neon, wobei $T = 1000 \text{ K}$ angenommen wurde. Die Wellenlänge beträgt $\lambda_S = 632,816 \text{ nm}$. Mit $\Delta f = 1364 \text{ MHz}$ (abgelesen am Laser) beträgt die Anzahl n schwingungsfähiger Moden dann annähernd

$$n \approx \frac{f_{FWHM}}{\Delta f} = 1,75 \approx 2$$

2.5 Berechnung der Kontrastfunktion bei mehreren Lasermoden

Kontrastfunktion bei 2 Moden

Wir haben gesehen, dass der hier verwendete Laser mehr als nur eine Mode hat. Interessant ist es nun, wie dies auf die Kontrastfunktion (den Kontrast, den wir wahrnehmen) wirkt. Seien also $U_{lR} = A e^{i\omega_l t}$ die Rekonstruktionswelle und $U_{lO} = A e^{i(\omega_l t + k_l s)}$ die Objektwelle zur Laserfrequenz ω_l mit $l = 1$ oder 2 . s ist der Gangunterschied zwischen beiden Wellenfeldern (also ist $k_l s$ ihre Phasendifferenz), die Amplituden werden bei allen Wellen als gleich und reell angenommen und die wirklich messbaren elektrischen Wellenfelder sind ihre Realteile, also $U_{lR, \text{mess}} = \text{Re}(U_{lR})$ bzw. $U_{lO, \text{mess}} = \text{Re}(U_{lO})$. Als nächstes führen wir die Gesamtwellen zu jeder Mode ein:

$$\begin{aligned} E_l &= U_{lR} + U_{lO} \\ &= A e^{i\omega_l t} (1 + e^{ik_l s}) \\ &= A_l e^{ia_l} \end{aligned}$$

¹ siehe <http://www.experimetalchemie.de/bilder05/05-e/periodensystem.gif>

Denn es gilt $1 + e^{ik_1s} = (1 + \cos(k_1s)) + i \sin(k_1s) = be^{i\delta_1}$, woraus

$$\begin{aligned} A_l &= A \cdot b \\ &= A \sqrt{(1 + \cos(k_1s))^2 + \sin^2(k_1s)} \\ &= A \sqrt{2 + 2 \cos(k_1s)} \end{aligned}$$

sowie

$$\begin{aligned} \tan(\delta_l) &= \frac{\sin(k_1s)}{1 + \cos(k_1s)} \\ &= \tan\left(\frac{k_1s}{2}\right) \end{aligned}$$

und hieraus $a_l = \omega_l t + \delta_l = \omega_l t + \frac{k_1s}{2}$ folgt (zur hier verwendeten Beziehung s. [2] S. 82). Nun berechnen wir die Intensität, die der Mittelwert der quadrierten Summe der realen elektrischen Felder ist, wobei $\langle \cdot \rangle$ die zeitliche Mittelung über eine Periode bezeichnet. E^* ist die zu E komplex konjugierte Funktion. Da unsere realen elektrischen Felder reell sind, müssen wir die Realteile der Felder nehmen. Es gilt: $Re(E) = \frac{1}{2}(E + E^*)$.

$$\begin{aligned} I &\propto \frac{1}{4} \left\langle ((E_1 + E_2) + (E_1^* + E_2^*))^2 \right\rangle \\ &= \frac{1}{4} \left\langle (E_1 + E_2)^2 + (E_1^* + E_2^*)^2 + 2(E_1 + E_2)(E_1^* + E_2^*) \right\rangle \\ &= \frac{1}{4} \left\langle E_1^2 + E_2^2 + E_1^{*2} + E_2^{*2} + 2E_1E_2 + 2E_1^*E_2^* \right\rangle \\ &\quad + \frac{1}{2} \left\langle |E_1|^2 + |E_2|^2 + E_1^*E_2 + E_1E_2^* \right\rangle \\ &= \frac{1}{2} (|E_1|^2 + |E_2|^2) \\ &= \frac{1}{2} (A_1^2 + A_2^2) \\ &= A^2 (1 + \cos(k_1s) + 1 + \cos(k_2s)) \\ &= 2A^2 \left(1 + \cos\left(\frac{k_2 + k_1}{2}s\right) \cos\left(\frac{k_2 - k_1}{2}s\right) \right) \end{aligned}$$

Der Schritt von der dritten zur vierten Zeile erfolgte durch zeitliche Mittelung der Terme, die zu $e^{i\omega t}$ mit $\omega \neq 0$ proportional sind, denn es gilt $\langle e^{i\omega t} \rangle = \frac{1}{T} \int_0^{2\pi} e^{i\omega t} dt = 0$. Außerdem wurde im Übergang zur letzten Zeile das Additionstheorem (s. [2] S. 82) $\cos \alpha + \cos \beta = 2 \cos\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right) \cos\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)$ benutzt. Die Maxima bzw. Minima sind $I_{\pm} \propto 2A^2 (1 \pm |\cos\left(\frac{k_2-k_1}{2}s\right)|)$, da $k_1 + k_2$ im Vergleich zu $|k_1 - k_2|$ sehr schnell oszilliert. Hieraus folgt die Kontrastfunktion

$$K(s) = \frac{I_+ - I_-}{I_+ + I_-} = \left| \cos\left(\frac{k_2 - k_1}{2}s\right) \right|$$

Kontrastfunktion bei n Moden

Bei n Moden lässt sich die Rechnung analog zu der bei zwei Moden führen. Zunächst führen wir wie oben elektrische Felder zu jeder Mode ein, die sich aus der Summe der Referenz- und Objektwelle der jeweiligen Mode ergeben. Die Rechnung ist dieselbe wie oben, also gilt $E_l = A_l e^{ia_l}$ mit $A_l = A\sqrt{2 + 2\cos(k_l s)}$ und $a_l = \omega_l t + \frac{k_l s}{2}$, wobei l diesmal zwischen 1 und n liegt. Seien außerdem die $\{k_l\}$ so angeordnet, dass $|k_l - k_{l-1}|$ für $l = 2, 4, 6, \dots$ minimal ist (und bei ungeradem n k_n möglichst groß ist; die Optimalität ist abhängig vom Algorithmus für diese Bedingungen). Auf diese Weise sind die Terme $|\cos(k_l - k_{l-1})|$ möglichst nahe bei 1.

Es gilt:

$$\begin{aligned}
 I &\propto \frac{1}{4} \left\langle \left(\sum_{l=1}^n E_l + \sum_{l=1}^n E_l^* \right)^2 \right\rangle \\
 &= \frac{1}{4} \left\langle \left(\sum_{l=1}^n E_l \right)^2 + \left(\sum_{l=1}^n E_l^* \right)^2 + 2 \left(\sum_{l=1}^n E_l \right) \left(\sum_{l=1}^n E_l^* \right) \right\rangle \\
 &= \frac{1}{2} \sum_{l=1}^n |E_l|^2 \\
 &= \frac{1}{2} \sum_{l=1}^n A_l^2 \\
 &= A^2 \sum_{l=1}^n (1 + \cos(k_l s)) \\
 &= A^2 \left(n + \sum_{l=1}^n \cos(k_l s) \right)
 \end{aligned}$$

Wie oben haben wir beim Schritt von der zweiten zur dritten Zeile zeitlich gemittelt, sodass alle Werte, die proportional zu $e^{i\omega t}$ mit $\omega \neq 0$ sind, wegfielen. Es blieben genau die Betragsterme übrig (dort ist $\omega = 0$). Nun kann man wieder wie oben ein Additionstheorem anwenden.

$$I \propto A^2 \left(n + 2 \sum_{\sim} \cos\left(\frac{k_l + k_{l-1}}{2} s\right) \cos\left(\frac{k_l - k_{l-1}}{2} s\right) + \# \cos(k_n s) \right)$$

wobei \sim bedeutet, dass nur über gerade l summiert wird. Falls n ungerade ist, bleibt noch eine "ungepaarte" Wellenzahl k_n übrig, was mit dem Zeichen # gekennzeichnet wird. Da alle Moden ziemlich dicht beieinander liegen, sind die Summen zweier Wellenzahlen und sogar k_n sehr groß gegenüber $|k_l - k_{l-1}|$, was optimiert nahe Null liegt. Daher kann nicht nur $\cos\left(\frac{k_l + k_{l-1}}{2} s\right) \approx \pm 1$, sondern auch $\# \cos(k_n s) \approx \pm 1$ angenommen werden. Hieraus folgen die Intensitätsmax-

ima

$$I_{\pm} \propto A^2 \left(n \pm \left(2 \sum_{\sim} \left| \cos \left(\frac{k_l - k_{l-1}}{2} s \right) \right| + \#1 \right) \right)$$

und die Kontrastfunktion

$$K(s) = \frac{1}{n} \left(2 \sum_{\sim} \left| \cos \left(\frac{k_l - k_{l-1}}{2} s \right) \right| + \#1 \right)$$

Optimal ist diese Funktion, falls jeweils zwei Moden nah beieinander liegen, denn dann beträgt sie nahezu 1. Da aber die Moden endliche Abstände besitzen, wird der Kontrast i. a. mit zunehmendem n schlechter.

3 Versuchsaufbau und Durchführung

3.1 Versuchsdurchführung

Einstellen des Raumfilters

Die Linse nach dem Spalt muss wieder ihren Brennpunkt im Spalt haben. Wir überprüfen dies, indem der Strahlungsverlauf nach dem Durchgang durch die Linse möglichst gerade ist.

Hierbei ist darauf zu achten, dass der Brennpunkt der Mikrolinse genau im Spalt ist. Um dies zu erreichen, muss man den Abstand so wählen, dass nach dem Spalt erstens die höchste Intensität ist und zweitens keine Beugungsordnungen auftreten. Da alles nach Augenmaß gemacht wird, sind die Bedingungen nur ungefähr erfüllt.

Ein weiterer Punkt, auf den man achten sollte, ist, dass der gesamte Strahlungsverlauf, von Laser zur Wand, möglichst gerade ist. Dafür markiert man sich einen Punkt an der Wand und überprüft nach jedem optischen Element, ob man immer noch den Punkt trifft.

Hologramm einer Punktquelle

Nach dem Raumfilter wird ein Strahlenteiler aufgestellt (siehe Abb. 2). Weiter hinten im Strahlungsverlauf stellt man einen Schirm auf, an dessen Stelle später das Hologramm entstehen soll (also wo die Photoplatte steht). Der abgelenkte Strahl trifft auf einen Spiegel und wird von einer weiteren Linse gebündelt und zwar so, dass der Brennpunkt noch vor der Photoplatte ist um eine Punktquelle zu erzeugen. Diese Welle ist die Objektwelle. Die Welle, die nicht gespiegelt wird, ist die Referenzwelle.

Am Ende muss man noch darauf achten, dass sich Objekt- und Referenzwelle genau überlagern.

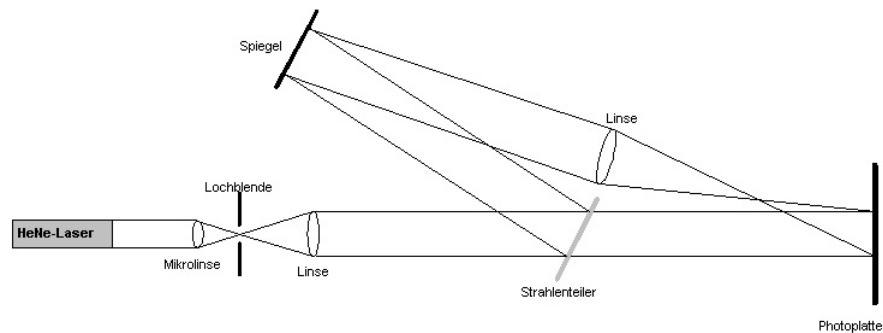


Figure 2: Punkthologramm

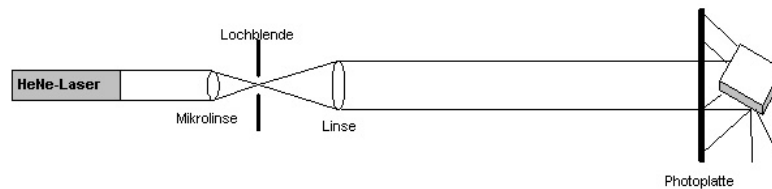


Figure 3: 3D-Hologramm

Aufnahme des Hologramms

Die Photoplatte wird eingesetzt und danach für ungefähr zwei Sekunden belichtet. Danach wird sie entwickelt. (2 min. in "Entwicklerflüssigkeit", 1 min. in Wasser, 2 min. in Bleichung und wieder 5 min. in Wasser. Danach getrocknet.)

War das Hologramm erfolgreich, sieht man, nachdem man es wieder in die Referenzwelle hält, hinter der Photoplatte zwei Lichtpunkte. Ein scharfes reelles Bild und ein unscharfes. Das unscharfe ist das komplexkonjugierte virtuelle Bild. Man kann es sehen, wenn man von der Rückseite durch das Hologramm blickt.

Messung zum Abbildungsgesetz

Hierfür wurden jeweils 8 Messungen mit zwei verschiedenen Linsen gemacht. Man stellt die Linsen so auf, dass ihr Brennpunkt hinter dem Hologramm liegt, und misst jeweils den Abstand der ersten und minus ersten Beugungsordnung zum Schirm.

3D-Hologramm

Bei einem 3D-Hologramm wird das Objekt hinter die Photoplatte gestellt, danach für etwa 5 Sekunden belichtet und dann entwickelt (siehe Abb. 3).

3.2 Raumfilter und Abschätzung der Beugungsordnungen

Ein Raumfilter ist ein System von zwei Linsen und einer Lochblende. Die beiden Linsen werden jeweils vor und hinter die Lochblende gestellt, sodass ihre Brennpunkte genau auf der Blende liegt. Da Brechung von der Wellenlänge abhängt, wird dadurch nur Licht einer bestimmten Wellenlänge durchgelassen.

Ein weiterer Nutzen von Raumfiltern ist das Eliminieren höherer Beugungsordnungen, die in optischen Elementen entstanden sind. Solche Beugungen können beispielsweise durch Verunreinigungen in der Linse kommen.

Doch auch die Lochblende lässt bei unserem Aufbau einige Beugungsordnungen zu. Diese werden durch die Beziehungen

$$\sin \alpha_n \approx \frac{(2n + 1)\lambda}{2d}$$

was gerade die Maxima bei der Beugung am Spalt (diese Formel wird hier approximativ statt der Formel für die Beugung an einer Lochblende benutzt) mit dem Lochdurchmesser $d = 54 \mu\text{m}$ und der eingestrahnten Wellenlänge $\lambda = 633 \text{ nm}$ darstellt, sowie durch

$$\sin \alpha_n = \frac{r}{\sqrt{f^2 + r^2}}$$

mit dem Radius der nachstehenden Linse $r \approx 1,8 \text{ cm}$ und ihrem Abstand zur Lochblende $f = 25 \text{ cm}$ (ihrer Brennweite) berechnet, wobei wir durch Gleichsetzen der Formeln die größte Beugungsordnung $n = 5,6 \approx 6$ erhalten. Wir haben also 6 Beugungsordnungen.

4 Auswertung

Unser Hologramm war die Abbildung einer Punktquelle mit Gegenstandsweite $z_G = -35 \text{ cm}$, das der Brennweite der benutzten Linse entspricht. Er wird als fehlerlos angenommen, da die Justierung der Linse ziemlich genau war, indem wir die Fotoplatte und die Linse so lange verschoben, bis die Objektwelle genau über der Referenzwelle lag. Dabei war die letztere eine ebene Welle mit senkrechtem Einfall auf die Platte. Um das Abbildungsgesetz in Gleichung 1 zu verifizieren, wurden zwei Linsen mit jeweils 35 cm - und 50 cm - Brennweite als (virtuelle) Punktquellen benutzt, deren Abstand von der Platte variiert wurde. Gemessen wurden die Abstände der Linsen und ihrer beiden Bilder von der Hologrammplatte. Das Abbildungsgesetz lautet in unserem Fall $z_{B1/2} = \left(\frac{1}{z_C} \pm \frac{1}{z_G}\right)^{-1}$, da $z_R \rightarrow \infty$ gilt. Der Gauß-Fehler beträgt dann $\Delta z_{B1/2} = \Delta z_C \left(1 \pm \frac{z_C}{z_G}\right)^{-2}$. Die gemessenen Abstände sowie die theoretisch errechneten sind in Zentimetern in Tabelle 1 für beide Linsen aufgelistet. Die ersten elf Wertetrippel wurden mit der Linse mit der Brennweite $f = 35 \text{ cm}$, die letzten acht Wertetrippel mit der Linse mit $f = 50 \text{ cm}$ gemessen, wobei $z_C = f - d_C$ gilt. Für die Fehler der Messwerte wurden $\Delta d_C = \Delta z_{B1/2} = 1 \text{ cm}$ angenommen, womit auch $\Delta z_C = 1 \text{ cm}$ gilt.

d_C	z_C	z_{B1}	z_{B1}^{theo}	Δz_{B1}^{theo}	z_{B2}	z_{B2}^{theo}	Δz_{B2}^{theo}
23	27	94,5	118,1	19,1	16	15,2	0,3
27	23	65,5	67,1	8,5	14,6	13,9	0,4
30	20	48,5	46,7	5,4	14	12,7	0,4
35	15	29	26,3	3,1	11,5	10,5	0,5
37	13	22,3	20,7	2,5	10,3	9,5	0,5
38	12	20	18,3	2,3	9,8	8,9	0,6
39,5	10,5	18	15	2	9,2	8,1	0,6
41	9	14,2	12,1	1,8	8	7,2	0,6
42,5	7,5	12,2	9,5	1,6	7,2	6,2	0,7
43,8	6,2	10,4	7,5	1,5	6,6	5,3	0,7
14	21	55	52,5	6,3	14	13,1	0,4
16	19	44,5	41,6	4,8	13,3	12,3	0,4
17,7	17,3	40,5	34,2	3,9	12,7	11,6	0,4
20,3	14,7	29,8	25,3	3	11,8	10,4	0,5
22,5	12,5	24	19,4	2,4	10,4	9,2	0,5
25	10	18	14	2	9,3	7,8	0,6
27	8	13,8	10,4	1,7	8,2	6,5	0,7
30	5	9	5,8	1,4	5,8	4,4	0,8

Table 1: Abstände vom Hologramm

Bemerkenswert ist bei diesem Diagramm, dass die errechneten Werte z_{B1}^{theo} bis auf wenige Ausnahmen 3 bis 4 cm kleiner sind als die gemessenen z_{B1} . Ähnlich sieht es aus bei den errechneten Werten z_{B2}^{theo} , die bis auf wenige Ausnahmen 1 bis 1,5 cm kleiner sind als die gemessenen z_{B2} . Dabei scheint es sich um systematische Fehler zu handeln, da die durch Fehlerfortpflanzung entstandenen Fehler der errechneten Werte mit sinkendem Bildabstand ebenfalls sinken, während die oben genannte Abweichung nahezu konstant ist. Die systematischen Fehler könnten an der Messung selbst liegen, sodass wir z. B. stets 1 cm länger gemessen haben könnten. Außerdem könnte die Gegenstandsweite trotz unserer (gefühlsmäßig) akkurater Justierung dennoch nicht ganz richtig sein, was sich auf das Hologramm auswirken könnte und den Unterschied zwischen den beiden systematischen Fehlern der Bildweiten z_{B1} und z_{B2} andeuten könnte.

Wie auf den Plots (siehe Abb. 4 und 5) zu erkennen ist, folgt unsere Messung bis auf die diskutierten vermutlich systematischen Fehler und bis auf einige Ausreißer ziemlich genau den erwarteten Kurven.

5 Fazit

In unserem Versuch haben wir die Holographie aus unterschiedlichen Perspektiven kennen gelernt: wir haben typische Aufbauten zur Erstellung von Holo-

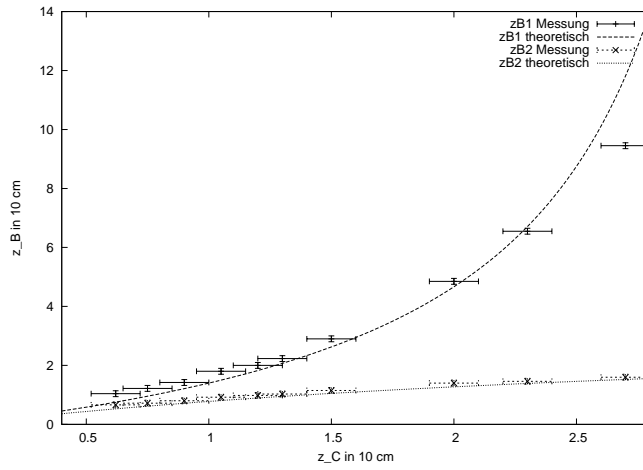


Figure 4: Linse mit 50 cm Brennweite

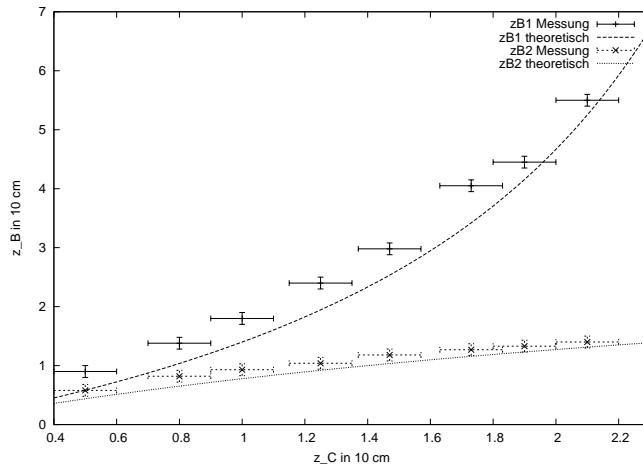


Figure 5: Linse mit 35 cm Brennweite

grammen ausprobieren dürfen, wir haben eine Punktquelle aufgenommen und mit dieser das Abbildungsgesetz bis auf einige vermutlich systematische Fehler nachvollziehen können, wir haben ein 3D-Hologramm erstellt, auf dem unser Objekt erstaunlich genau erkennbar war, und nicht zuletzt haben wir einen Einblick in die weiterführende Theorie der Holographie (z. B. die modenabhängige Kontrastfunktion) erhalten.

References

- [1] Literaturliste zum Versuch
- [2] Bronstein, Semendjajew, Musiol und Mühlhölzer; Taschenbuch der Mathematik; 7. Auflage; Verlag Harri Deutsch