
Test einer Bell'schen Ungleichung

Ilja Homm und Thorsten Bitsch
Betreuer: Thorsten Führer
15.10.2012



TECHNISCHE
UNIVERSITÄT
DARMSTADT

Fortgeschrittenen-Praktikum
Abteilung A

Inhalt

1	Einleitung	2
1.1	Ziel des Versuchs	2
2	Grundlagen	2
2.1	Verschränkung	2
2.2	Einstein-Podolsky-Rosen Paradoxon	2
2.3	Die Bellschen Ungleichungen	3
2.4	Erzeugung polarisationsverschränkter Photonen	4
2.5	Bestimmung des Bellwerts	5
2.5.1	Vorhersage der klassischen Theorie	5
2.5.2	Vorhersage der Quantenmechanik	5
3	Versuchsaufbau	7
4	Durchführung	8
4.1	Strom-Leistungs-Kennlinie des Lasers	8
4.2	Präparation des Bellzustands	8
4.3	Bestimmung der Polarisationskorrelation	8
4.4	Koinzidenzmessung zur Bestimmung des Bellwertes	8
5	Auswertung	9
5.1	Strom-Leistungs-Kennlinie des Lasers	9
5.2	Präparation des Bellzustandes	10
5.3	Bestimmung der Polarisationskorrelation und indirekte Bestimmung des Bellwerts	11
5.4	Bestimmung des Michelsonkontrasts	13
5.5	direkte Bestimmung des Bellwerts	13
6	Fazit	14
7	Quellen	15

1 Einleitung

1.1 Ziel des Versuchs

Mit Hilfe eines Tests der Bell'schen Ungleichung soll der Versuch zeigen, ob die klassische oder die quantentheoretische Sicht der Physik besser geeignet ist die Wirklichkeit zu beschreiben. Die klassische Physik setzt nämlich sowohl Lokalität, als auch Realität voraus. Lokalität bedeutet, dass bei zwei räumlich getrennten Teilchen eine Messung an einem Teilchen keine instantanen Auswirkungen zeigt auf das andere, also kein überlichtschneller Informationsaustausch stattfinden kann. Realistisch heisst, dass jede Messung nur eine Eigenschaft abliest, die auch vorliegt, wenn keine Messung durchgeführt worden ist und sie nur auf Grund von versteckten Variablen nicht bekannt ist. Die Quantentheorie stellt keine solchen Bedingungen, was dazu geführt hat, dass Albert Einstein, Boris Podolsky und Nathan Rosen die Quantentheorie für Unvollständig gehalten und das Einstein-Podolsky-Rosen Paradoxon (EPR-Paradoxon) formuliert haben.

2 Grundlagen

Der folgende Abschnitt soll den Leser in die theoretischen Grundlagen des Versuchs einführen.

2.1 Verschränkung

Ein Quantenzustand $|\psi\rangle$ heisst *verschränkt*, wenn er der Zustand zweier verschiedener messbarer Objekte ist. Ein solcher Zustand kann geschrieben werden als

$$|\psi\rangle = \sum_{k,l} c_{kl} |k\rangle_1 \otimes |l\rangle_2 \quad (1)$$

Ein Zustand heisst *separabel*, wenn für ihn $c_{kl} = a_k b_l$ gilt. Andernfalls ist er verschränkt. Sind zwei Objekte miteinander verschränkt, so wird bei der Messung einer Observable des einen Objekts, die Observable des anderen Objekts instantan(!) festgelegt. Dabei spielt eine räumliche Trennung keine Rolle.

2.2 Einstein-Podolsky-Rosen Paradoxon

Da Albert Einstein, Boris Podolsky und Nathan Rosen die Quantenmechanik für eine unvollständige Theorie hielten, formulierten sie ein Gedankenexperiment, das einen Widerspruch der quantenmechanischen Vorhersagen aufzeigen sollte. In dem Gedankenexperiment sollen zwei Objekte impuls- und ortsverschränkt sein. Wenn der Ort des einen und der Impuls des anderen Objekts scharf gemessen wird, wären für beide Objekte sowohl Impuls, als auch Ortsmessung gleichzeitig möglich, was allerdings scheinbar einen Widerspruch zur Heisenbergschen Unschärferelation darstellt. Dieses Gedankenexperiment wird Einstein-Podolsky-Rosen (EPR) Paradoxon genannt.

EPR gingen davon aus, dass die Quantenmechanik keine vollständige Theorie sei. Sie versuchten die Quantenmechanik zu vervollständigen, indem sie die Existenz sogenannter *verborgener Parameter* λ annahmen. Diese Parameter seien laut EPR bereits vor der Messung festgelegt, werden jedoch nicht gemessen und beeinflussen den Ausgang eines Experiments entscheidend. Der scheinbare Widerspruch des Paradoxons löst sich auf, wenn beide Objekte nicht als separat angenommen werden. Vielmehr besitzen beide Objekte ein und die selbe Wellenfunktion ψ , für die die quantenmechanischen Gesetzmäßigkeiten gelten.

2.3 Die Bellschen Ungleichungen

Die Bellschen Ungleichungen sind rein mathematische Überlegungen, die allgemein gültig sind. Seien $N_1 \dots N_4$ Häufigkeiten einer bestimmten Verteilung, also positive ganze Zahlen, so gilt immer

$$N_1 + N_2 \leq (N_1 + N_3) + (N_2 + N_4) \quad (2)$$

Aus diesen Häufigkeiten können Erwartungswerte und Wahrscheinlichkeiten abgeleitet werden. Für die Wahrscheinlichkeit P_{ij} , dass die Verteilungen $N_i + N_j$ auftreten gilt

$$P_{ij} = \frac{N_i + N_j}{\sum_{n=1}^4 N_n} \quad (3)$$

Aus diesen Wahrscheinlichkeiten können allgemein auch Erwartungswerte abgeleitet werden, sodass die Ungleichung nur noch von Erwartungswerten abhängt.

Im Versuch soll eine spezielle Bellsche Ungleichung, die CHSH-Ungleichung (CHSH: Clauser, Horne, Shimony und Holt), untersucht werden. Hierbei seien A und B zwei polarisationsverschränkte Objekte, die unter den Winkeln a und b orientiert sind. λ sei hierbei ein verborgener Parameter. Für ein Experiment seien die Erwartungswerte für das Ergebnis: $A(a, \lambda), B(b, \lambda) = \pm 1$ (+1: detektiert, -1: nicht detektiert). Für den Erwartungswert eines solchen Experiments gilt:

$$E(a, b) = \int A(a, \lambda)B(b, \lambda)\rho(\lambda)d\lambda \quad (4)$$

Für zwei weitere Polarisationswinkel a_\perp und b_\perp gilt für den Bellwert Daraus folgt für die Erwartungswerte

$$E(a, b) = P_{VV}(a, b) + P_{HH}(a, b) - P_{VH}(a, b) - P_{HV}(a, b) \quad (5)$$

und für den Bellwert

$$S = E(a, b) - E(a, b_\perp) + E(a_\perp, b) + E(a_\perp, b_\perp) \leq 2 \quad (6)$$

Da die Erwartungswerte $E(\cdot, \cdot) = \pm 1$

Es müssen also lediglich die Wahrscheinlichkeiten für ein Experiment bekannt sein, um den Bellwert ausrechnen zu können.

2.4 Erzeugung polarisationsverschränkter Photonen

Im Versuch werden zwei doppelbrechende Kristalle dazu verwendet, polarisationsverschränkte Photonen zu erzeugen. Trifft ein Photon auf ein isotropes optisches Medium, so bewirkt sein E-Feldvektor im Medium eine Polarisation $P = \epsilon_0 \chi E$. In doppelbrechenden Materialien existieren jedoch auch nichtlineare Anteile.

$$P = \epsilon_0 (\chi^{(1)} E + \chi^{(2)} E^2 + \chi^{(3)} E^3 + \dots) \quad (7)$$

Fällt ein Photon in ein solches Medium, so können zwei Photonen mit doppelter Wellenlänge entstehen. Die Polarisation der austretenden Photonen ist um 90° zur Polarisation des einfallenden Photons gedreht. Um die Impulserhaltung zu ermöglichen, müssen die 810-nm-Photonen den gleichen Brechungsindex besitzen wie die 405-nm-Photonen. Das geht nur in doppelbrechenden Materialien und nur dann, wenn ein Photon ordentlich und die beiden anderen außerordentlich polarisiert sind. Die Phasenanpassung beschreibt die Methoden, mit denen die Bedingung $n(\omega) = n(2\omega)$ erfüllt wird. Es wird zwischen kritischer und nicht-kritischer Phasenanpassung unterschieden. Bei der kritischen Phasenanpassung kann durch drehen des Kristalls die Phase angepasst werden. Bei der nicht-kritischen Phasenanpassung wird die Eigenschaft von doppelbrechenden Materialien ausgenutzt, dass sich ihre Brechzahlen mit der Temperatur ändern. Dies ist die bevorzugte Variante, da diese genauer ist. Die austretenden Photonen werden signal (s) und idler (i) genannt. Dieser Effekt ist der umgekehrte Effekt zur Frequenzverdopplung. Im Versuch sind beide Photonen parallel polarisiert. Dieser Effekt wird Spontaneous Parametric Down Conversion I (SPDC I) genannt. Beim SPDC II Prozess sind die austretenden Photonen orthogonal zueinander polarisiert. Ist die Polarisationsebene des einfallenden Photons um 45° zu den optischen Achsen beider Kristalle gedreht, so ist die Wahrscheinlichkeit, dass zwei horizontal bzw. vertikal polarisierte Photonen emittiert werden gleich wahrscheinlich. Auf Grund dieser Tatsache sind die austretenden Photonen verschränkt. Mathematisch werden die Zustände der einzelnen Prozesse wie folgt beschrieben

$$|V\rangle_p \mapsto |H\rangle_s |H\rangle_i \quad (8)$$

$$|H\rangle_p \mapsto e^{i\phi} |V\rangle_s |V\rangle_i \quad (9)$$

wobei ϕ für eine Phasendifferenz steht.

Fällt eine linear polarisierte Welle unter einem Winkel θ zur Vertikalen $|V\rangle$ ein, so gilt:

$$|\psi\rangle_p = \cos \theta |V\rangle_p + e^{i\phi} \sin \theta |H\rangle_p \quad (10)$$

mit (8) und (9) ergibt sich:

$$|\psi\rangle_p \mapsto |\psi\rangle_{DC} = \cos \theta |H\rangle_s |H\rangle_i + e^{2i\phi} \sin \theta |V\rangle_s |V\rangle_i \quad (11)$$

$|\psi\rangle_{DC}$ ist dann ein verschränkter Zustand.

Der Zustand der die Bellsche Ungleichung maximal verletzt, wird Bell-Zustand genannt. Für ihn gilt $\theta = \frac{\pi}{4}$ und $\phi = 0$:

$$|\psi\rangle_{Bell} = \frac{1}{\sqrt{2}} [|H\rangle_s |H\rangle_i + |V\rangle_s |V\rangle_i] \quad (12)$$

2.5 Bestimmung des Bellwerts

Nun sollen die Vorhersagen der Quantenmechanik und der klassischen Theorie gegenüber gestellt werden. Für beide ergeben sich nach nicht ganz trivialer Rechnung unterschiedliche Erwartungswerte. Zur Veranschaulichung zeigen die nächsten beiden 3D-Plots wie unterschiedlich die möglichen Ergebnisse für den Bellwert $S(a, b, a', b')$ sind. Hierbei wurden willkürlich $a' = a + 45^\circ$ und $b' = b + 45^\circ$ gesetzt.

2.5.1 Vorhersage der klassischen Theorie

Für die Wahrscheinlichkeiten der klassischen Vorhersage gelten die Werte

$$P_{VV} = P_{HH} = \left| \frac{|a - b|}{\pi} - \frac{1}{2} \right| \quad (13)$$

$$P_{VH} = P_{HV} = \frac{|a - b|}{\pi} + \frac{1}{2} \quad (14)$$

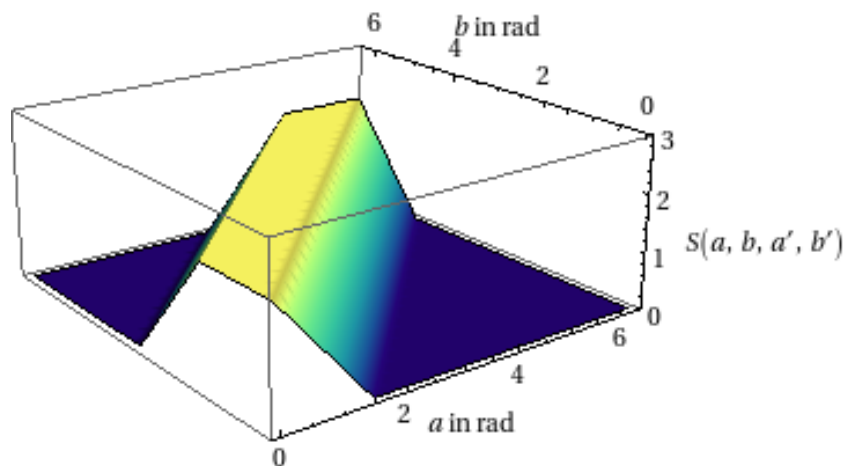


Abbildung 1: 3D-Plot des lokal-realistischen Bellwerts als Funktion der Winkel a, b, a', b' . Die Menge der möglichen Bellwerte beinhaltet nur Werte ≤ 2

2.5.2 Vorhersage der Quantenmechanik

Für die quantenmechanische Vorhersage gilt das Gleiche wie im vorherigen Teilabschnitt, jedoch ergibt sich für die Wahrscheinlichkeiten

$$P_{VV} = P_{HH} = \frac{1}{2} \cos^2(a - b) \quad (15)$$

$$P_{VH} = P_{HV} = \frac{1}{2} \sin^2(a - b) \quad (16)$$

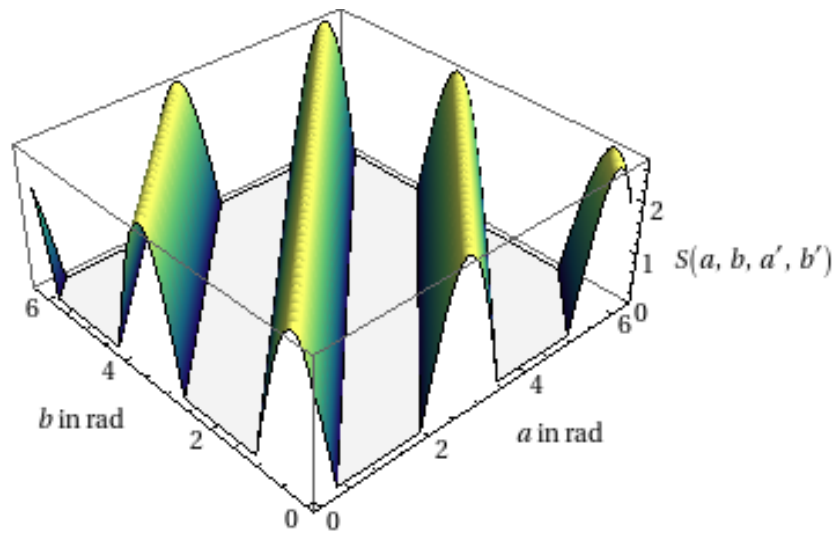


Abbildung 2: 3D-Plot des quantenmechanischen Bellwerts als Funktion der Winkel a , b , a' , b' . Die Menge der möglichen Bellwerte beinhaltet auch Werte ≥ 2

3 Versuchsaufbau

Abbildung 3 zeigt eine Skizze des verwendeten Versuchsaufbaus. Als Lichtquelle dient ein Halbleiterlaser mit der Wellenlänge $\lambda = 405 \text{ nm}$ und einer Leistung von ca. 40 mW. Der Laserstrahl wird über zwei justierbare Spiegel auf ein Teleskop, das die Energiedichte des Laserstrahls erhöht. Ein drehbares $\lambda/2$ -Plättchen dient dazu die Polarisation des Lasers zu drehen. Dahinter befinden sich zwei BariumBorat(BBO)-Kristalle, deren optische Achsen 90° zueinander gedreht sind. Da BaB_2O_4 ein doppelbrechendes Medium ist, entstehen in den BBO-Kristallen polarisationsverschränkte Photonen der Wellenlänge $\lambda = 810 \text{ nm}$, deren Polarisationen parallel sind. Diese fallen auf zwei drehbare Polarisatoren, die im Versuch als Analysatoren fungieren. Die Irisblenden dienen dazu zusätzliches Streulicht der Umgebung auszublenden. Die Sammellinsen focussieren die Strahlen auf die Detektoren. Die Langpassfilter sorgen dafür, dass lediglich Photonen größerer Wellenlänge auf die dahinter befindlichen Detektoren fallen.

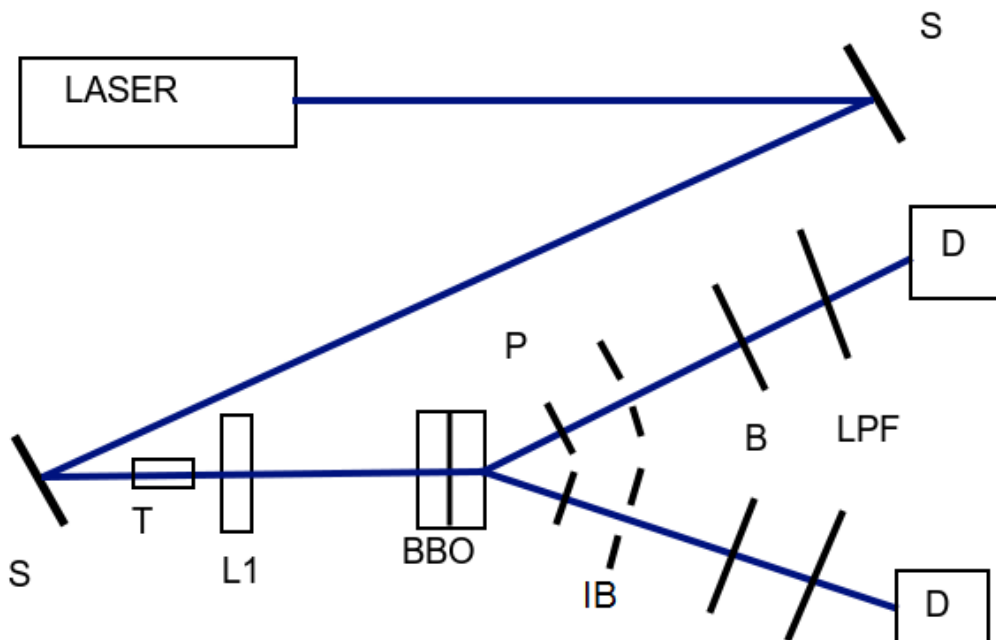


Abbildung 3: Skizze des Versuchsaufbaus

S: Spiegel, T: Teleskop, IB: Irisblende, B: Blende, LPF: Langpassfilter, P: Polarisatoren, D: Detektoren, L1: $\lambda/2$ -Plättchen, BBO: BBO-Kristalle

4 Durchführung

Im Folgenden werden die Einzelnen Schritte des Versuchs erläutert. Die Durchführung des Versuchs unterteilt sich in die Untersektionen **Strom-Leistungs-Kennlinie des Lasers**, **Präparation des Bellzustands**, **Bestimmung der Polarisationskorrelation**, **Koinzidenzmessung zur Bestimmung des Bellwertes**.

4.1 Strom-Leistungs-Kennlinie des Lasers

Zur Aufnahme der Strom-Leistungskennlinie des Lasers wird eine Photodiode zwischen $\lambda/2$ -Plättchen und den Laser in den Strahlengang eingebracht. Anschließend wird die Stromzufuhr des Lasers schrittweise erhöht und seine Leistung mit Hilfe eines Powermeters gemessen.

4.2 Präparation des Bellzustands

Anschließend wird jeweils für verschiedene Polarisatorwinkel $\alpha = \beta \in \{0^\circ, 20^\circ, 40^\circ, \dots, 180^\circ\}$ der Winkel des $\lambda/2$ -Plättchens $\theta \in \{0^\circ, 10^\circ, \dots, 90^\circ\}$ variiert und eine Koinzidenzmessung durchgeführt. Der Winkel für den Bellzustand wird ermittelt, indem alle Datensätze geplottet werden und ein Schnittpunkt aller Kurven abgeschätzt wird. Zur Kontrolle wird eine weitere Messung durchgeführt. Das $\lambda/2$ -Plättchen wird auf den zuvor abgeschätzten Winkel eingestellt und beide Polarisatoren in 20° -Schritten gleichzeitig gedreht.

4.3 Bestimmung der Polarisationskorrelation

Das $\lambda/2$ -Plättchen wird auf den zuvor ermittelten Winkel für den Bellzustand eingestellt. Anschließend wird Polarisator A auf die Winkel $0^\circ, 45^\circ, 90^\circ$ und 135° eingestellt und jeweils der Polarisator B in 20° -Schritten von 0° bis 360° gedreht. Für jede Winkelkombination wird eine Koinzidenzmessung durchgeführt. Für eine verbesserte Datenqualität wird jede Messung zweimal bei einer Messdauer von 10 Sekunden durchgeführt.

4.4 Koinzidenzmessung zur Bestimmung des Bellwertes

Die vorherige Messung wird wiederholt. Dafür werden die Polarisatoren auf jede mögliche Kombination Winkel $22,5^\circ, 67,5^\circ, 112,5^\circ$ und $157,5^\circ$ eingestellt und jeweils zwei Koinzidenzmessungen mit einer Messdauer von $t = 30$ Sekunden durchgeführt.

5 Auswertung

Im Folgenden Abschnitt werden die Messergebnisse, sowie die nötigen Rechnungen und Unsicherheiten präsentiert.

5.1 Strom-Leistungs-Kennlinie des Lasers

Die folgende Grafik zeigt die aufgenommenen Datenpunkte der Leistungsmessung am Laser aus Tabelle (1). I_{AM} ist der Wert der Anzeige des Amperemeters, der einen Offset von $(2,4 \pm 0,1)$ mA hatte, und I der Wert abzüglich des Offsets. An die Datenpunkte wurde eine Gerade gefittet.

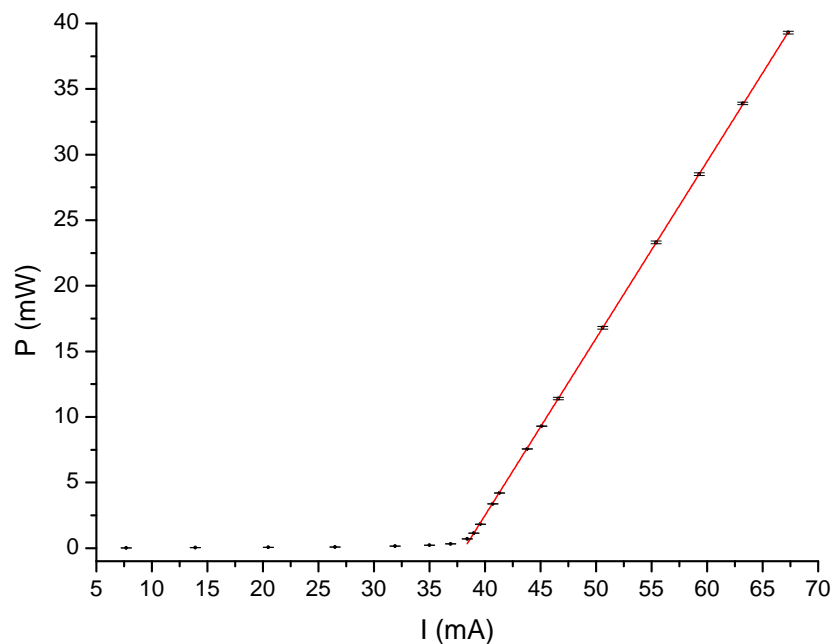


Abbildung 4: Strom-Leistungs-Kennlinie des Lasers

Tabelle 1: Datenpunkte zur Strom-Leistungs-Kennlinie

I_{AM}/mA	I/mA	P/mW	I_{AM}/mA	I/mA	P/mW
10,1	7,7	0,0197	43,1	40,7	3,37
16,3	13,9	0,0389	43,7	41,3	4,2
22,9	20,5	0,062	46,2	43,8	7,56
28,9	26,5	0,0903	47,5	45,1	9,3
34,3	31,9	0,14	49	46,6	11,4
37,4	35	0,211	53	50,6	16,8
39,3	36,9	0,322	57,8	55,4	23,3
40,8	38,4	0,704	61,7	59,3	28,5
41,4	39	1,14	65,6	63,2	33,9
42	39,6	1,82	69,7	67,3	39,3

Der Laser wird mit einer Leistung von $(39,3 \pm 0,3)$ mW betrieben. Die Unsicherheit für die Leistung beträgt 1 % und für den Strom 0,1 mA.

5.2 Präparation des Bellzustandes

Die folgenden beiden Abbildungen zeigen die Fitkurven durch die aufgenommenen Punkte zur Präparation des Bellzustandes. Die Schnittpunkte zeigen die Winkel, bei denen ein Bellzustand präpariert ist. Da sich die Fitkurven nicht exakt in einem Punkt schneiden, wurden die Schnittpunkte und deren Unsicherheiten abgeschätzt.

Koinzidenzen in 1/(3 s)

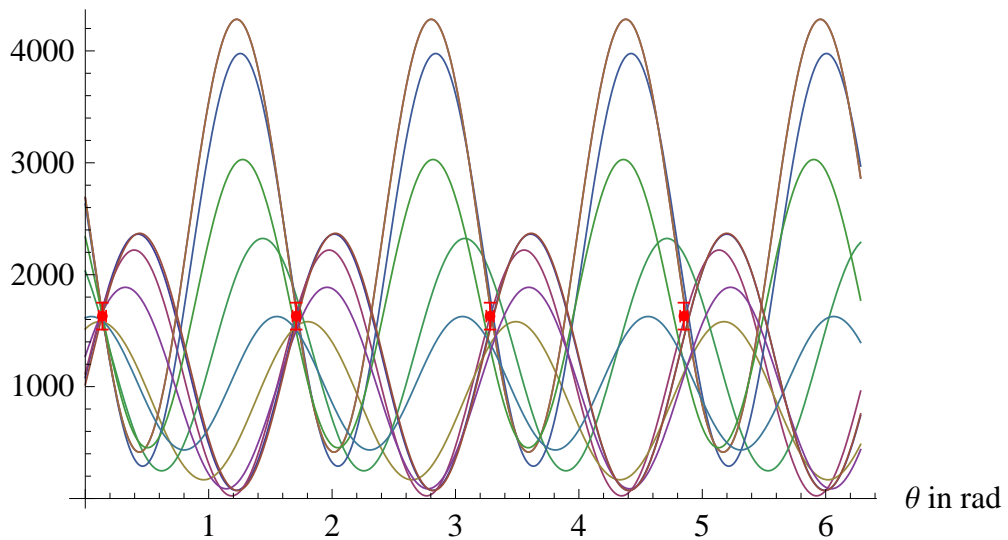


Abbildung 5: Abschätzung des Bellwinkels

$$\theta_{Bell} = (0,139 \cdot \frac{n\pi}{2} \pm 0,03) \text{ rad mit } n \in \text{natürliche Zahlen}$$

Koinzidenzen in 1/(3 s)

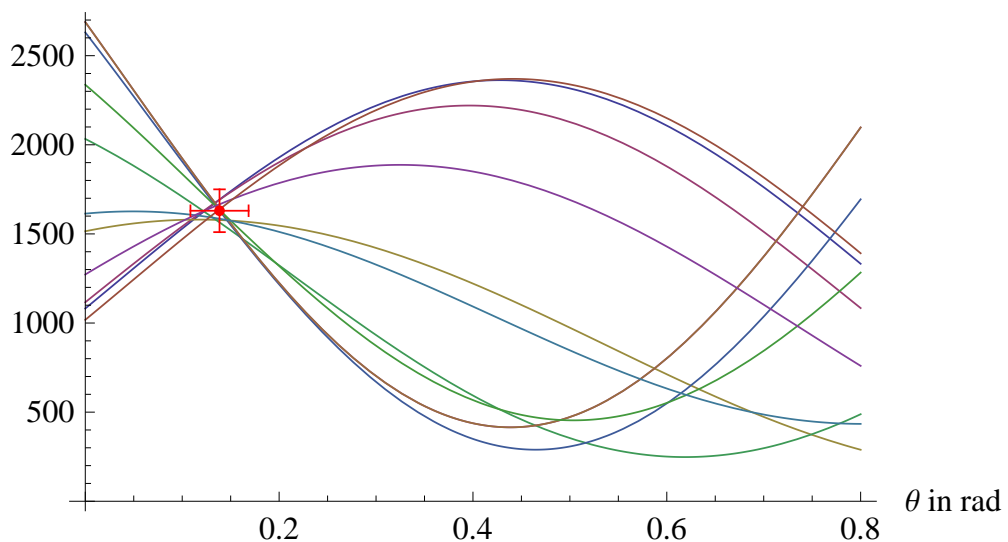


Abbildung 6: Abschätzung des Bellwinkels

$$\theta_{Bell} = (0,139 \pm 0,03) \text{ rad}$$

5.3 Bestimmung der Polarisationskorrelation und indirekte Bestimmung des Bellwerts

Zur Bestimmung der Polarisationskorrelation, wurde der Winkel des einen Polarisators $\alpha \in \{0^\circ, 45^\circ, 90^\circ, 135^\circ\}$ fest eingestellt und der Winkel β in 20° -Schritten variiert. Anschließend wurde die Funktion (17) an die Datenpunkte gefittet. Die folgenden Abbildungen zeigen das Ergebnis. Da immer zwei Werte pro Winkel aufgenommen wurden, wurden zwei verschieden Symbole verwendet. Die Kreise symbolisieren die Werte, die zuerst aufgenommen wurden.

$$N(\beta) = A \cdot \cos^2(B \cdot \beta + C) + D \quad (17)$$

Koinzidenzen in 1/(10 s)

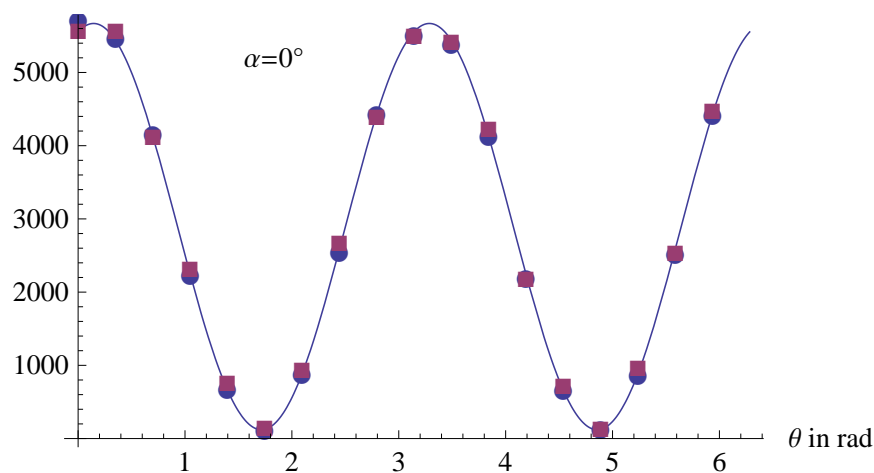


Abbildung 7: Polarisationskorrelationen mit Fitfunktion (17)

$A \rightarrow 5548,37 \pm 26,5$; $B \rightarrow 1$; $C \rightarrow 1,43$; $D \rightarrow 5669 \pm 16,7$

Koinzidenzen in 1/(10 s)

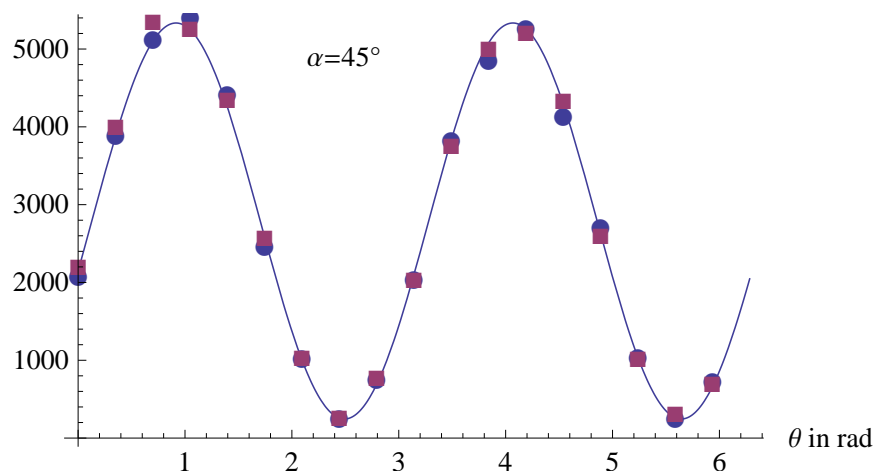


Abbildung 8: Polarisationskorrelationen mit Fitfunktion (17)

$A \rightarrow 5088,89 \pm 44,1$; $B \rightarrow 1$; $C \rightarrow 0,65$; $D \rightarrow 5334,53 \pm 27,4$

Koinzidenzen in 1/(10 s)

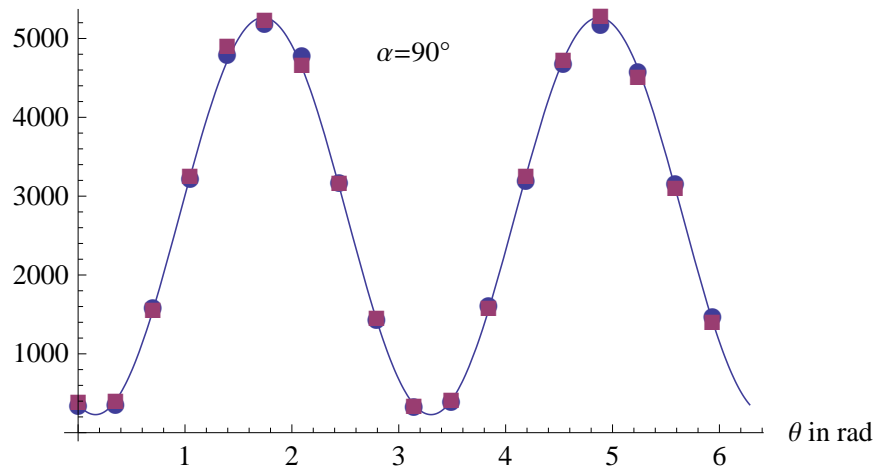


Abbildung 9: Polarisationskorrelationen mit Fitfunktion (17)

A $\rightarrow 5035,83 \pm 29,5$; B $\rightarrow 1$; C $\rightarrow 1,41$; D $\rightarrow 229,04 \pm 18,5$

Koinzidenzen in 1/(10 s)

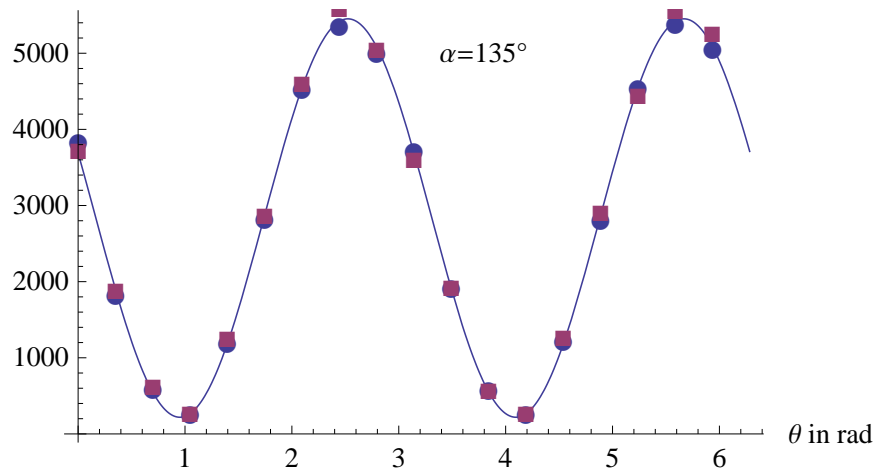


Abbildung 10: Polarisationskorrelationen mit Fitfunktion (17)

A $\rightarrow 5232,62 \pm 33,01$; B $\rightarrow 1$; C $\rightarrow 0,62$; D $\rightarrow 219,04 \pm 20,52$

(α, β)	$N(\alpha, \beta)$	$N(\alpha_{\perp}, \beta)$	$N(\alpha, \beta_{\perp})$	$N(\alpha_{\perp}, \beta_{\perp})$
$(0^{\circ}, 22,5^{\circ})$	$5334,62 \pm 73,04$	$491,71 \pm 22,17$	$454,84 \pm 21,3$	$5000,34 \pm 70,71$
$(0^{\circ}, 67,5^{\circ})$	$1574,57 \pm 39,7$	$3868,55 \pm 62,2$	$4214,77 \pm 64,9$	$1621,6 \pm 40,27$
$(45^{\circ}, 22,5^{\circ})$	$4017,39 \pm 63,81$	$1690,12 \pm 41,11$	$1531,79 \pm 39,14$	$3975,02 \pm 63,05$
$(45^{\circ}, 67,5^{\circ})$	$4995,02 \pm 70,68$	$481,66 \pm 21,95$	$572,01 \pm 23,92$	$5191,75 \pm 72,05$

$$E(\alpha, \beta) = \frac{N(\alpha, \beta) + N(\alpha_{\perp}, \beta_{\perp}) - N(\alpha, \beta_{\perp}) - N(\alpha_{\perp}, \beta)}{N(\alpha, \beta) + N(\alpha_{\perp}, \beta_{\perp}) + N(\alpha, \beta_{\perp}) + N(\alpha_{\perp}, \beta)} \quad (18)$$

Mit den vorherigen Daten und der Gleichung 18 können die Erwartungswerte und der Bellwert berechnet werden.

- $E(0^{\circ}, 22,5^{\circ}) = 0,832 \pm 0,005$

- $E(0^\circ, 67,5^\circ) = -0,433 \pm 0,008$
- $E(45^\circ, 22,5^\circ) = 0,425 \pm 0,008$
- $E(45^\circ, 67,5^\circ) = 0,815 \pm 0,006$

Für den Bellwert ergibt sich somit:

$$S = E(0^\circ, 22,5^\circ) - E(0^\circ, 67,5^\circ) + E(45^\circ, 22,5^\circ) + E(45^\circ, 67,5^\circ) = 2,506 \pm 0,014$$

Wie von der Quantenmechanik vorhergesagt, verletzt der Bellwert die Bellsche Ungleichung. Dieser Widerspruch zur lokal realistischen Vorhersage zeigt, dass die Quantenmechanik das Experiment besser beschreibt.

5.4 Bestimmung des Michelsonkontrasts

Der Michelsonkontrast kann als Maß für die Verschränkung der Photonen angenommen werden. Er berechnet sich aus

$$M = \frac{I_{max} - I_{min}}{I_{max} + I_{min}} \quad (19)$$

kann jedoch auch durch die berechneten Fitparameter berechnet werden.

$$M = \frac{A}{A + 2D} \quad (20)$$

α	M	ΔM
0°	0,329	0,001
45°	0,323	0,002
90°	0,92	0,006
135°	0,923	0,007

ΔM wurde mit Hilfe der Gaußschen Varianzenfortpflanzung berechnet.

$$\Delta M = \frac{2}{(A + 2D)^2} \cdot \sqrt{D^2 \cdot \Delta A^2 + A^2 \cdot \Delta D^2} \quad (21)$$

5.5 direkte Bestimmung des Bellwerts

(α, β)	$N(\alpha, \beta)$	$N(\alpha_\perp, \beta)$	$N(\alpha, \beta_\perp)$	$N(\alpha_\perp, \beta_\perp)$
$(0^\circ, 22,5^\circ)$	$12632 \pm 112,39$	$4359 \pm 66,02$	$2929,5 \pm 54,12$	$13931,5 \pm 118,03$
$(0^\circ, 67,5^\circ)$	$1625,5 \pm 40,32$	$14966 \pm 122,34$	$15988,5 \pm 126,45$	$1339,5 \pm 36,6$
$(45^\circ, 22,5^\circ)$	$15391,5 \pm 124,06$	$1632 \pm 40,4$	3025 ± 55	$13844,5 \pm 117,66$
$(45^\circ, 67,5^\circ)$	$11694 \pm 108,14$	$4834,5 \pm 69,5$	$4912,5 \pm 70,09$	$12171 \pm 110,32$

Für diese Messwerte wird analog zu vorherigem Teilabschnitt vorgegangen. Für die Erwartungswerte ergibt sich

- $E(0^\circ, 22,5^\circ) = 0,569 \pm 0,004$

-
- $E(0^\circ, 67,5^\circ) = -0,825 \pm 0,003$
 - $E(45^\circ, 22,5^\circ) = 0,725 \pm 0,004$
 - $E(45^\circ, 67,5^\circ) = 0,42 \pm 0,005$

Für den direkt bestimmten Bellwert ergibt sich somit:

$$\begin{aligned} S &= E(0^\circ, 22,5^\circ) - E(0^\circ, 67,5^\circ) + E(45^\circ, 22,5^\circ) + E(45^\circ, 67,5^\circ) \\ &= 2,539 \pm 0,008 \end{aligned}$$

Da dieser Wert > 2 ist, existiert ein Widerspruch zur Bellschen Ungleichung. Das bedeutet, dass die Erwartungen der lokal realistischen Theorie nicht erfüllt wurden. Allerdings wurde auch der quantenmechanisch vorausgesagte Wert $S = 2\sqrt{2}$ nicht erreicht, da der Bellzustand nicht perfekt präpariert werden kann.

6 Fazit

Der Versuch hat gezeigt, dass sich die Einführung eines verborgenen Parameters zur Vervollständigung der Quantenmechanik als nicht sinnvoll erweist. Die Vorhersagen der lokal-realistischen Denkansätze liefern Vorhersagen, die im vorliegenden Versuch widerlegt wurden. Sowohl die direkte, als auch die indirekte Bestimmung des Bellwertes haben ganz klar die Vorhersagen der lokal-realistischen Theorie widerlegt. Die bestimmten Bellwerte sind größer als zwei und liegen näher an dem quantenmechanisch vorhergesagten Wert. Zusammenfassend hat sich gezeigt, dass die Quantenmechanik in ihren grundlegendsten Vorhersagen vermutlich nicht unvollständig ist, sondern bessere Übereinstimmung mit der Realität zeigt, als dies für klassische Modelle der Fall ist.

7 Quellen

- [1] Versuchsanleitung Versuch 4.2, Abteilung A, TU Darmstadt
- [2] Literaturliste Versuch 4.2, Abteilung A, TU Darmstadt
- [3] <http://homepage.univie.ac.at/franz.embacher/Quantentheorie/EPR/> (Abrufdatum 16.10.2012)
- [4] www.wikipedia.org (Abrufdatum 16.10.2012)