
4.2: Test der Bellschen Ungleichung

Andreas Kleiner

Matr-Nr.: 1574166

E-Mail: akleiner@online.de

Anton Konrad Cyrol

Matr-Nr.: 1639629

E-Mail: anton.cyrol@stud.tu-darmstadt.de

Betreuer: Thorsten Führer

Versuch durchgeführt am: 17.10.2011

Abgabedatum: 21.10.2011



TECHNISCHE
UNIVERSITÄT
DARMSTADT

PHYSIKALISCHES PRAKTIKUM
FÜR FORTGESCHRITTENE

Hiermit versichern wir das vorliegende fortgeschrittenen Praktikumsprotokoll ohne Hilfe Dritter nur mit den angegebenen Quellen und Hilfsmitteln angefertigt zu haben. Alle Stellen, die aus Quellen entnommen wurden, sind als solche kenntlich gemacht. Diese Arbeit hat in gleicher oder ähnlicher Form noch keiner Prüfungsbehörde vorgelegen.

Darmstadt, den 21.10.2011

Andreas Kleiner

Anton Konrad Cyrol

Inhaltsverzeichnis

1	Einführung	2
2	Theoretische Grundlagen	2
2.1	Lokalität	2
2.2	Realismus	2
2.3	Verborgene Parameter	2
2.4	Verschränkung	2
2.5	Einstein-Podolsky-Rosen Paradoxon	2
2.6	Bellsche Ungleichung	2
2.7	Nichtlineare Optik	3
2.8	Frequenzverdopplung	3
2.9	Spontaneous parametric downconversion (SPDC)	3
3	Versuchsaufbau	4
3.1	Aufbau	4
3.2	Messung der Koinzidenzen	4
4	Versuchsdurchführung & Auswertung	4
4.1	Vorbemerkung	4
4.2	Strom-Leistungs-Kennlinie	5
4.3	Bellzustand	5
4.4	Polarisationskorrelation und Photonenpaardetektionseffizienz	7
4.5	Berechnung des Bellwertes	10
4.5.1	Mit Messpunkten	11
4.5.2	Mit Daten aus den Fits	11
5	Fazit	11
6	Messdaten	12
6.1	Leistungskennlinie	12
6.2	Bellzustand	12
6.3	Polarisationskorrelation und Photonenpaardetektionseffizienz	14
6.4	Bellwert	18

1 Einführung

Eine klassische physikalische Theorie soll nach Einstein, Podolsky und Rosen vollständig sein, d.h. jedes Element der physikalischen Realität muss in der Theorie berücksichtigt werden und sie muss lokal sein, d.h. es sind keine Fernwirkungen möglich. Diese Kriterien treffen auf die Quantenmechanik nicht zu.

Die Bellschen Ungleichungen ermöglichen es, die Quantenmechanik experimentell daraufhin zu überprüfen ob sie eine klassische Theorie im Sinne der obigen Definition ist. Im Versuch soll eine solche Überprüfung mittels verschränkter Photonen, deren Polarisation gemessen wird, durchgeführt werden.

2 Theoretische Grundlagen

2.1 Lokalität

Lokalität bedeutet, dass Wirkungen eines Objektes nur die direkte Umgebung desselben beeinflussen können und somit keine Fernwirkung möglich ist.

2.2 Realismus

Realismus bedeutet, dass jedes Element der physikalischen Realität ein Gegenstück in der Theorie haben muss. Ein Element physikalischer Realität ist eine physikalische Größe, die, ohne das System zu stören, mit Sicherheit ($P = 1$) gemessen werden kann.

2.3 Verborgene Parameter

Unter verborgenen Parametern werden Parameter verstanden, die die Quantenmechanik vervollständigen sollen. Die verborgene Parameter tauchen in deterministischen Theorien auf. Diese sollen den Zufall in der Quantenmechanik eliminieren.

2.4 Verschränkung

Verschränkung bezeichnet die Eigenschaft der Quantenmechanik, dass eine Messung an einem Teil eines Systems auch andere Teile des Systems beeinflussen kann.

Zum Beispiel können zwei Teilchen im Impuls verschränkt sein, sodass der Betrag des Impulses beider Teilchen gleich hoch ist. Wird der Betrag des Impulses eines Teilchens gemessen, so kollabiert die Wellenfunktion. Da die Teilchen den gleichen Impulsbetrag haben, ist der Impulsbetrag beider Teilchen bekannt. Das bemerkenswerte ist, dass die Wellenfunktion instantan kollabiert, d.h. der Zustand des Systems ist dann an allen Orten genau bestimmt. Damit ist auch der Impuls des anderen Teilchen bekannt, an dem keine Messung durchgeführt wurde. Bei dieser Fernwirkung („spooky action at a distance“) wird jedoch keine Information übertragen.

2.5 Einstein-Podolsky-Rosen Paradoxon

Das Einstein-Podolsky-Rosen Paradoxon (EPR-Paradoxon) ist ein Gedankenexperiment der drei genannten Physiker. Es soll zeigen, dass die Quantenmechanik keine klassische Theorie, die nach den Kriterien Einsteins der Lokalität und dem Realismus gehorchen soll, ist. Verschränkte Teilchen in der Quantenmechanik zeigen jedoch Eigenschaften, die gegen dieses Prinzip verstoßen.

Um dies zu rechtfertigen, postulierten EPR die Existenz versteckter Variablen, durch die die Fernwirkung erklärt werden sollte.

Betrachtet werden zwei Teilchen, die in einem verschränkten Zustand vorliegen. Ihre Wellenfunktion lässt sich nicht als Tensorprodukt der Einzelzustände beschreiben. Die Teilchen entfernen sich voneinander, sodass sie nicht mehr lokal wechselwirken können. Nach der Heisenbergschen Unschärferelation gibt es komplementäre Messgrößen, die an einem System nicht gleichzeitig mit beliebig hoher Genauigkeit bestimmt werden können. Wird nun an einem der verschränkten Teilchen eine Observable gemessen und an dem anderen Teilchen eine komplementäre Observable. Nun zeigt sich, dass beide Größen beliebig genau bestimmt werden können und der Eigenzustand, in den das System nach der ersten Messung übergeht, und der Eigenzustand, der sich in der zweiten Messung ergibt, korreliert sind. Diese Tatsache wurde von EPR als „spukhafte Fernwirkung“ aufgefasst, die in einer klassischen Theorie nicht möglich ist.

2.6 Bellsche Ungleichung

Lange Zeit gab es keine Möglichkeit, das EPR-Paradoxon experimentell zu überprüfen, erst die Bellsche Ungleichung, welche 1964 von dem Physiker John Bell aufgestellt wurde, lässt dies zu. Sie gibt eine obere Schranke für einen experimentell messbaren Wert an, den Theorien, welche lokal und realistisch sind, nicht überschreiten können. Im Versuch wird

die CHSH - Version für Photonen genutzt. In der CHSH-Formulierung wurde die Bell'sche Ungleichung an experimentelle Bedingungen besser angepasst. Der CHSH-Version nach gilt für alle lokale und realistische Theorien:

$$E(a, b) - E(a, b') + E(a', b) + E(a', b') =: S \leq 2 \quad (1)$$

a, b, a', b' sind vier Polarisationswinkel. Die Größe E ist Maß für die Korrelation der Polarisation der Photonen. Sie kann aus der Anzahl der Koinzidenzen $N(\alpha, \beta)$ unter den Winkeln α und β bestimmt werden:

$$E(\alpha, \beta) = \frac{N(\alpha, \beta) + N(\alpha_{\perp}, \beta_{\perp}) - N(\alpha, \beta_{\perp}) - N(\alpha_{\perp}, \beta)}{N(\alpha, \beta) + N(\alpha_{\perp}, \beta_{\perp}) + N(\alpha, \beta_{\perp}) + N(\alpha_{\perp}, \beta)} \quad (2)$$

Hierbei ist α_{\perp} ein Winkel, der zu α orthogonal ist. Gleiches gilt für β .

Die Quantenmechanik sagt einen höheren Wert voraus ($S_{max} = 2\sqrt{2}$) als er für lokal und realistische Theorien erlaubt ist. Experimentell wird die obere Schranke überschritten. Demzufolge kann es keine Theorie geben, die lokal und realistisch ist und die Welt richtig beschreibt.

2.7 Nichtlineare Optik

Fällt eine elektromagnetische Welle auf ein Medium, so induziert die einfallende Welle elektrische Dipolmomente. Die Vektorsumme der elektrischen Dipolmomente entspricht der dielektrischen Polarisation. In der linearen Optik wird davon ausgegangen, dass die dielektrische Polarisation proportional zur elektrischen Feldstärke der einfallenden Welle ist. Dadurch folgt, dass im linearen Bereich das Superpositionsprinzip und die Erhaltung der Wellenfrequenz gilt. Diese beiden Prinzipien gelten in der nichtlinearen Optik nicht mehr. Daher muss die dielektrische Polarisation nach der elektrischen Feldstärke entwickelt werden:

$$\vec{P}(\vec{E}) = \epsilon_0 \left[\chi^{(1)} \vec{E}^1 + \chi^{(2)} \vec{E}^2 + \chi^{(3)} \vec{E}^3 + \dots \right] \quad (3)$$

Es gilt $\chi^{(n)} \gg \chi^{(n+1)}$. Folglich treten Effekte höherer Potenzen erst bei hoher Intensität auf.

2.8 Frequenzverdopplung

Optische Frequenzverdopplung ist ein nichtlinearer Effekt 2. Ordnung. Er wird dadurch hervorgerufen, dass Elektronen soweit ausgelenkt werden, bis die entstehende Schwingung anharmonisch ist. Es entstehen folglich Wellen höherer Frequenzen. Damit sich eine sogenannte Oberwelle doppelter Frequenz makroskopisch ausbreiten kann, müssen sich, die von den einzelnen Oszillatoren ausgehenden Wellen, konstruktiv überlagern. Dies ist genau dann der Fall, falls die Phasengeschwindigkeit der Oberwelle und der Grundwelle gleich sind. Da diese gegeben ist durch $v_{phase} = c/n(\omega)$, muss gelten:

$$n(\omega) = n(2\omega) \quad (4)$$

Dies kann mit optisch anisotropen Medien erreicht werden. Z.B. genügt ein optisch einachsiger Kristall, dessen Brechungsindexellipsoid folglich rotationssymmetrisch ist. Dazu muss die sogenannte Phasenanpassung vorgenommen werden, sodass Gleichung (4) erfüllt ist, hierfür gibt es zwei Möglichkeiten:

- Kritische Phasenanpassung: Durch variieren des Winkels zwischen der Ausbreitungsrichtung der Welle und der optischen Achse kann erreicht werden, dass $n(\omega_o) = n(\omega_{ao})$ ist (wobei o für ordentlicher und ao für außerordentlicher Strahl steht). Ist nun $\omega_o = \omega$ und $\omega_{ao} = 2\omega$, so kann die Bedingung (4) erfüllt werden. Diese Weise der Phasenanpassung wird als kritisch bezeichnet, da bereits minimale Winkeländerung einen großen Einfluss haben.
- Nichtkritische Phasenanpassung: Durch Änderung der Temperatur des Kristalls ändert sich der Brechungsindex. Folglich lässt sich auch so eine Phasenanpassung durchführen. Da sich der Brechungsindex nur geringfügig mit der Temperatur ändert lässt sich die Temperatur relativ leicht einstellen.

Häufig wird die Grobjustage über den Winkel und die Feinjustage über die Temperatur vorgenommen.

2.9 Spontaneous parametric downconversion (SPDC)

Als SPDC wird Zeitumkehrung der Frequenzverdopplung bezeichnet. Es wird zwischen zwei Typen unterschieden:

- Typ 1: Die austretenden Photonen sind gleich polarisiert.
- Typ 2: Die austretenden Photonen sind orthogonal zueinander polarisiert.

Im Versuch wird ein β -Barium-Borat-Kristall ($\beta\text{-BaB}_2\text{O}_4$), im Folgenden BBO genannt, genutzt. Dieser erzeugt gleich polarisierte, verschränkte Photonen.

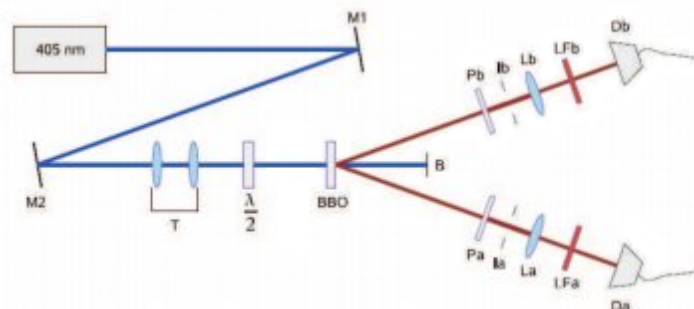


Abbildung 1: Skizze des Versuchsaufbaus, entnommen der Versuchsanleitung zu diesem Versuch: „Belltest“, Seite 7, heruntergeladen von „<http://www.iap.tu-darmstadt.de/praktika/fp/abteilung-a>“ am 19. Oktober 2011 um 21:30 Uhr. Aus der Grafik wurde das $\lambda/4$ -Plättchen entfernt um den tatsächlichen Aufbau darzustellen.

3 Versuchsaufbau

3.1 Aufbau

Der Versuchsaufbau besteht aus einem Laser, dessen Licht über Spiegel, ein Teleskop und Halbwellenlängen-Plättchen auf einen BBO-Kristall gelenkt wird. Aufgrund der doppelbrechenden Eigenschaften des Kristalls werden die ausfallenden Strahlen aufgrund der Polarisationsrichtung der einfallenden Strahlen in unterschiedliche Richtungen abgelenkt. Zwei verschränkte Photonen bewegen sich in unterschiedlicher Richtung vom Kristall weg und werden nach dem Durchlaufen eines Polarisators, einer Irisblende und eines Langpassfilters in den Detektoren registriert. Zum einfacheren Verständnis ist in Abb. 1 eine Skizze gezeigt.

3.2 Messung der Koinzidenzen

Ziel der Koinzidenzmessung ist es, verschränkte Photonenpaare zu detektieren. Dazu werden die Detektoren mit einem Zähler verbunden, der die einzelnen Zählraten der Detektoren, d.h. die Gesamtzahl der registrierten Photonen für jeden Detektor ermittelt. Ein zweiter Zähler wird im Gatemodus betrieben. Der Diskriminatorausgang von Kanal A in Zähler 1 wird als Triggersignal in Zähler 2 verwendet. Der Diskriminatorausgang von Kanal B wird an ein Field Programmable Gate Array (FPGA) geleitet und dort mit zwei unterschiedlichen Delays zeitverzögert und an Zähler 2 weitergegeben. So können wahre und zufällige Koinzidenzen getrennt ausgegeben werden.

4 Versuchsdurchführung & Auswertung

4.1 Vorbemerkung

Das Amperemeter, welches den Strom den der Laser verbraucht, misst, hatte einen Offset von 2.3 mA. Diesen haben wir sofort bei der Messung berücksichtigt. D.h. in alle Werten des Protokolls ist der Offset bereits abgezogen. Die „wahren“ Koinzidenzen ergeben sich als Differenz aller Koinzidenzen abzüglich der zufälligen.

$$N = N_{\text{Gesamt}} - N_{\text{Zufällig}} \quad (5)$$

Der Fehler von N berechnet sich wie folgt:

$$N = \sqrt{(\Delta N_{\text{Gesamt}})^2 - (\Delta N_{\text{Zufällig}})^2} \quad (6)$$

Im Protokoll ist immer N angegeben. Die Originaldaten N_{Gesamt} und $N_{\text{Zufällig}}$ sind am Ende des Protokolls angehängt.

4.2 Strom-Leistungs-Kennlinie

Zunächst wurde mittels eines Powermeters die Leistung des Lasers ermittelt. Dabei wurde der Strom zwischen 0 mA und 70 mA variiert. Ein linearer Fit durch alle Messwerte, die bei einem Strom $I > 40\text{ mA}$ gemessen wurden, ergibt

$$P(I) = 13.88 \frac{\text{mW}}{\text{mA}} \cdot I - 53.93 \text{ mW}. \quad (7)$$

Ein linearer Fit durch alle Messwerte, die bei einem Strom $I < 40\text{ mA}$ gemessen wurden, ergibt

$$P(I) = 0.006984 \frac{\text{mW}}{\text{mA}} \cdot I - 0.03914 \text{ mW}. \quad (8)$$

In Abb. (2) ist gut zu erkennen, dass bei $(38.86 \pm 0.07)\text{ mA}$ die Laser-Emission einsetzt, wie sich aus dem Schnitt der Fitgeraden ergibt, und die Leistung über diesem Strom, linear steigt.

In den folgenden Teilen des Versuchs wurde der Laser mit einem Strom von $(67.7 \pm 0.1)\text{ mA}$ betrieben. Dies entspricht einer Leistung von $(40.03 \pm 0.14)\text{ mW}$.

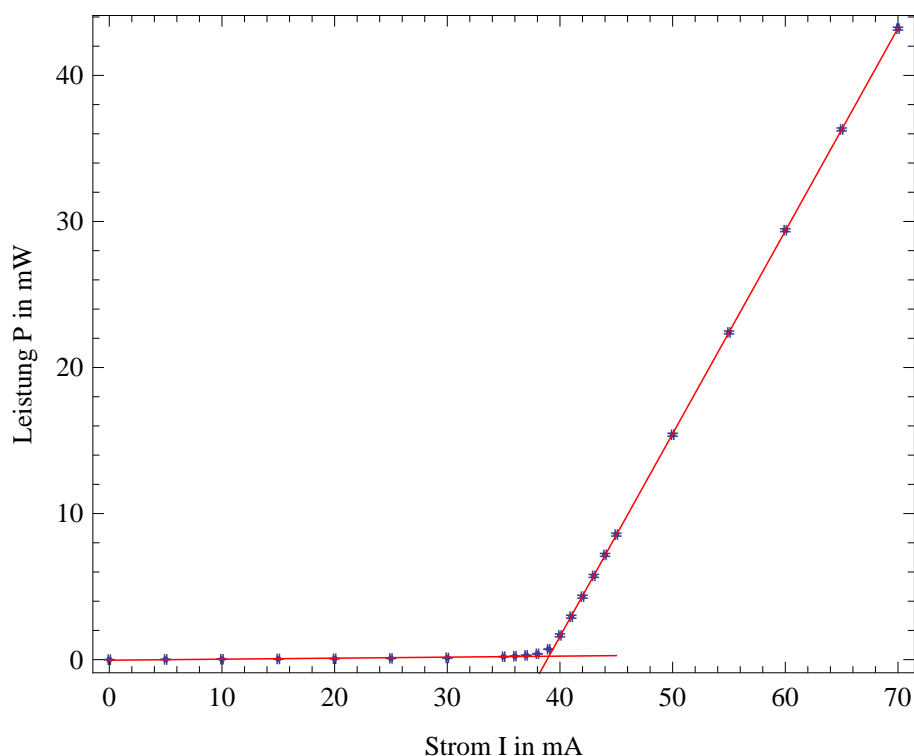


Abbildung 2: Leistung des Lasers in Abhängigkeit des Stroms

4.3 Bellzustand

Um den benötigten Bellzustand zu erzeugen wurden beide Polarisatoren auf einen Winkel von $\alpha = \beta = 0^\circ$ (vertikal) gestellt. Da bei der SPDC die Pumpphoton orthogonal zu den konvertierten Photonen stehen, werden so folglich nur Pumpphotonen gemessen, die von dem BBO - Kristall mit horizontaler optischer Achse konvertiert wurden. Die Polarisation des Laserstrahls wurde mittels eines $\text{Lambda}/2$ - Plättchen variiert. Abb. 3 zeigt den erwarteten $\cos(\theta)$ - Verlauf. Um das Maximum genauer zu bestimmen wurde in der Umgebung des Maximums in kleineren Schritten gemessen. Ein Fit ergibt:

$$N(\theta) = 1259.47 - 1265.66 \cos(30.0613^\circ - 0.0702222 \theta) \quad (9)$$

Das Maximum lag bei $\theta_{\max} \approx 28^\circ$. Diesen Wert haben wir während des Versuchs nur mit den Rohdaten, ohne grafische Auftragung oder Fit, abgeschätzt. Der Theorie nach wird der Bellzustand bei einem Winkel von $\theta = \theta_{\max} - 22.5^\circ = 5.5^\circ$ erreicht. Bei einem optimalen Bellzustand ist die Zählrate der Koinzidenz bei allen Winkeln $\alpha = \beta$ gleich hoch. Da der grob abgeschätzte Wert für θ_{\max} recht ungenau ist, wurde der Bellzustand überprüft. Dafür wurde $\alpha = \beta$ variiert, bei konstantem $\theta = 5.5^\circ$. Das Ergebnis ist in Abb. 4 (blau) zu sehen.

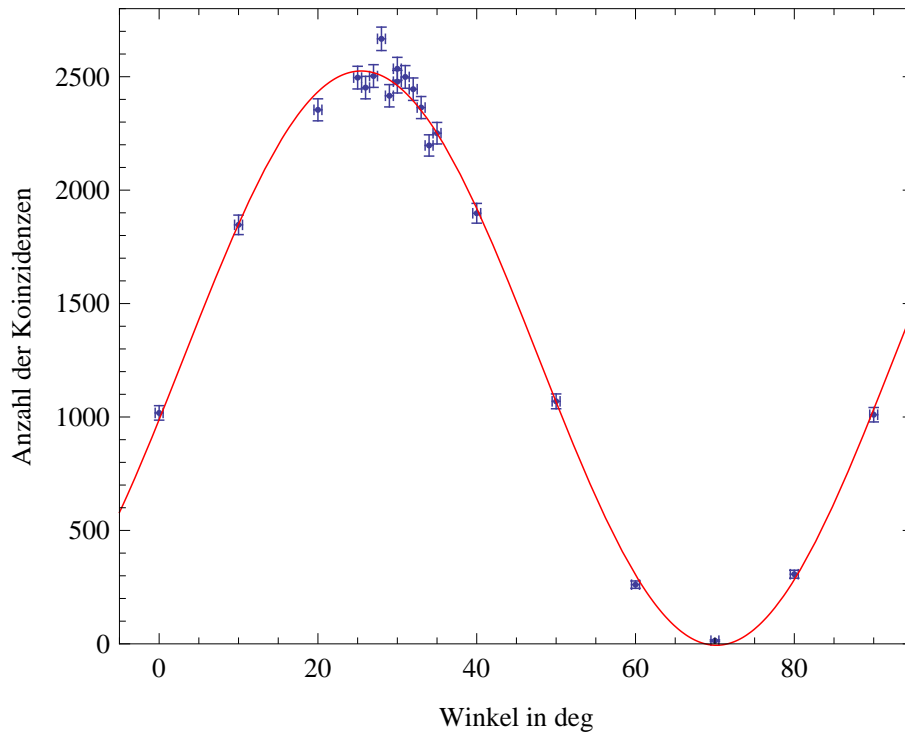


Abbildung 3: Anzahl der Koinzidenzen in Abhängigkeit des Winkels des $\lambda/2$ -Plättchens. Zu erkennen ist das Maximum bei $\theta_{max} \approx 28^\circ$.

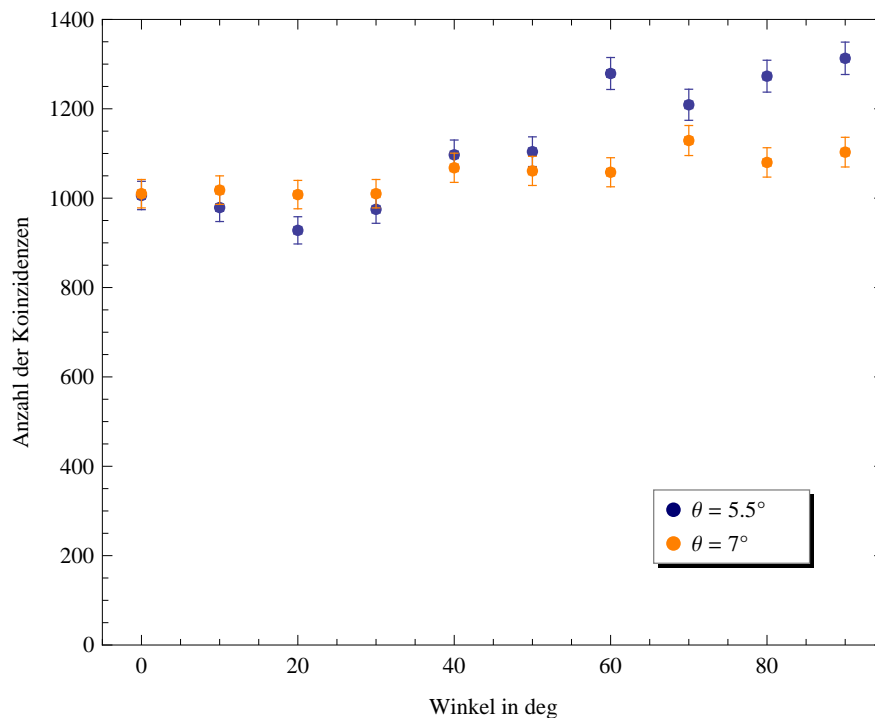


Abbildung 4: Schwankung der Koinzidenzen bei $\theta = 5.5^\circ$ und $\theta = 7.0^\circ$. Auftragung der Koinzidenzen über α bzw. β

Da die Koinzidenzen noch um etwa 29% schwanken, haben wir θ variiert. Für $\theta = 7.0^\circ$ lag die Schwankung bei weniger als 11% (siehe Abb. 4 (orange)). Somit haben wir einen brauchbaren Bellzustand erzeugt. In den folgenden Versuchsteilen wurde θ nicht mehr verändert, sodass immer ein Bellzustand vorlag. Wie der Fit (9) zeigt, kam der schlechte Bellzustand bei $\theta = 5.5^\circ$ durch eine nicht ausreichend genaue Bestimmung des Maximums zu Stande. Dem Fit nach wäre $\theta_{max} = 30.06^\circ - 22.5^\circ = 7.56^\circ$.

4.4 Polarisationskorrelation und Photonenpaardetektionseffizienz

Zur Bestimmung der Polarisationskorrelation und der Detektionseffizienz des Bellzustands wurde der Polarisator B(β) bei den Werten 0° , 45° , 90° und 135° festgehalten, während der Polarisator A(α) variiert wurde. Gemessen wurden die Koinzidenzen über einen Zeitraum von zweimal 10s je Winkeleinstellung.

Die Auftragung der Koinzidenzen über α wurden mit der folgenden, sich aus der quantenmechanischen Theorie ergebenden, Formel gefittet:

$$N(\alpha, \beta) = A \cdot \cos^2 [B \cdot (\alpha - \beta) + C] + D \quad (10)$$

Der Michelson-Kontrast ergibt sich dann als

$$V_{\text{Michelson}}(\beta) = \frac{N_{\text{max}} - N_{\text{min}}}{N_{\text{max}} + N_{\text{min}}} = \frac{A + D - D}{A + D + D} = \frac{A}{A + 2D} \quad (11)$$

Der Fehler berechnet sich mit Gaußscher Fehlerfortpflanzung zu

$$\Delta V_{\text{Michelson}}(\beta) = \sqrt{\left(\left(\frac{-A}{(A + 2D)^2} + \frac{1}{A + 2D} \right) \cdot \Delta A \right)^2 + \left(\frac{2A \cdot \Delta D}{(A + 2D)^2} \right)^2} \quad (12)$$

Die erreichte Photonenpaardetektionseffizienz η berechnet sich wie folgt:

$$\eta = \frac{N_{\text{Koin}}}{\sqrt{N_A \cdot N_B}} \quad (13)$$

Der Fehler berechnet sich wiederum mit Gaußscher Fehlerfortpflanzung zu

$$\Delta \eta = \sqrt{\left(\frac{\Delta N_{\text{Koin}}}{\sqrt{N_A \cdot N_B}} \right)^2 + \left(\frac{\Delta N_A \cdot N_B \cdot N_{\text{Koin}}}{2(N_A \cdot N_B)^{3/2}} \right)^2 + \left(\frac{\Delta N_B \cdot N_A \cdot N_{\text{Koin}}}{2(N_A \cdot N_B)^{3/2}} \right)^2} \quad (14)$$

Für $N(\alpha, 0^\circ)$ ergab der Fit (siehe Abb. 5):

$$N(\alpha, 0^\circ) = 1120 \cdot \cos^2 [0.01746 \cdot (\alpha - 0^\circ) + 9.277] + 164.3 \quad (15)$$

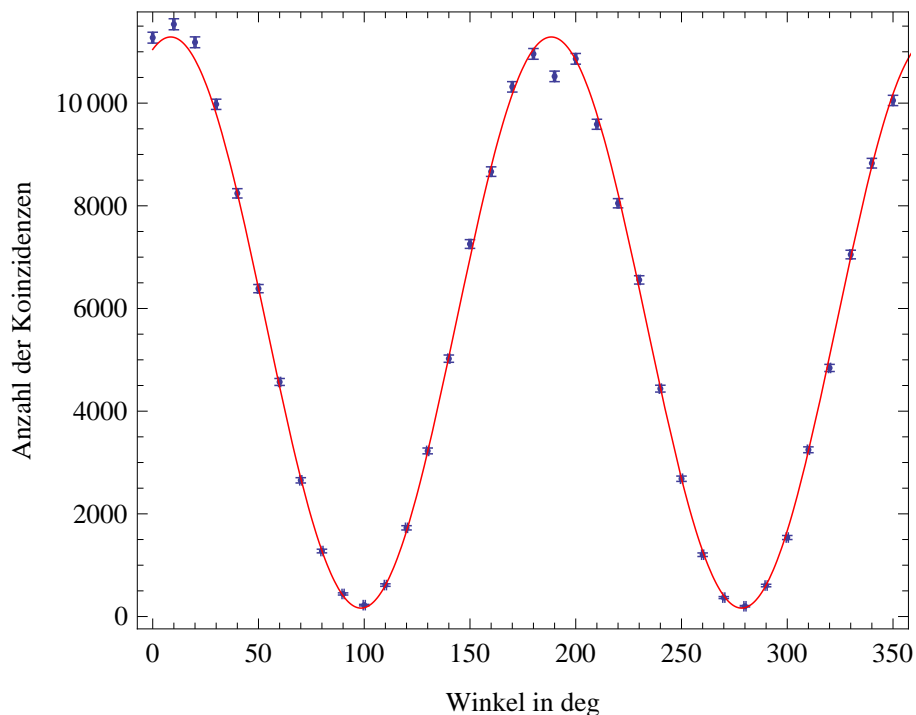


Abbildung 5: Auftragung der Koinzidenzen über α bei $\beta = 0^\circ$

Für $N(\alpha, 45^\circ)$ ergab der Fit (siehe Abb. 6):

$$N(\alpha, 45^\circ) = 10590 \cdot \cos^2 [0.01741 \cdot (\alpha - 45^\circ) + 9.252] + 456.2 \quad (16)$$

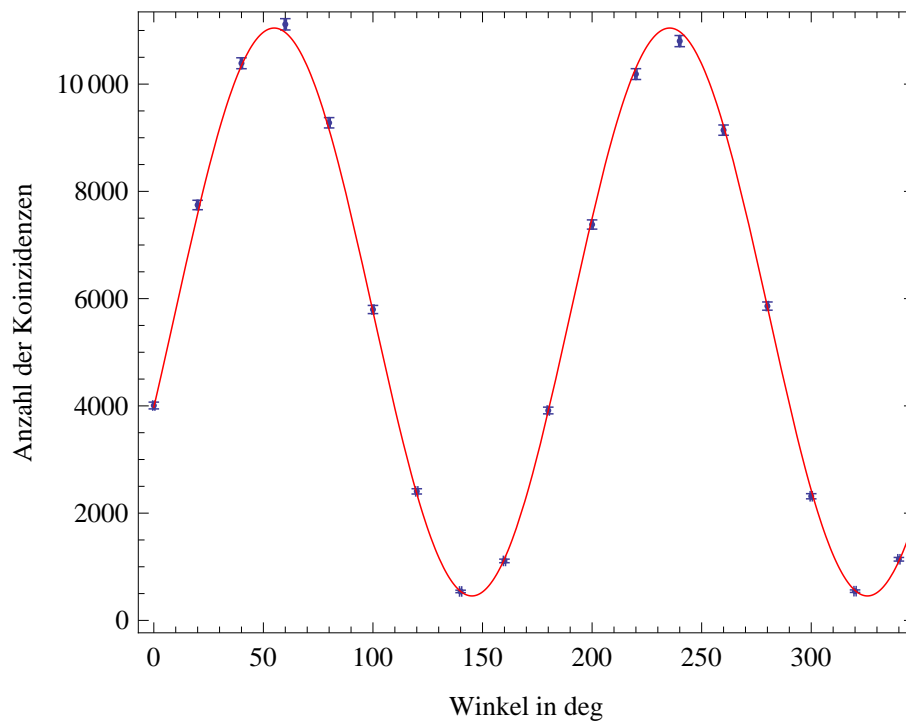


Abbildung 6: Auftragung der Koinzidenzen über α bei $\beta = 45^\circ$

Für $N(\alpha, 90^\circ)$ ergab der Fit (siehe Abb. 7):

$$N(\alpha, 90^\circ) = 11530 \cdot \cos^2 [0.001744 \cdot (\alpha - 90^\circ) + 9.249] + 343.6 \quad (17)$$

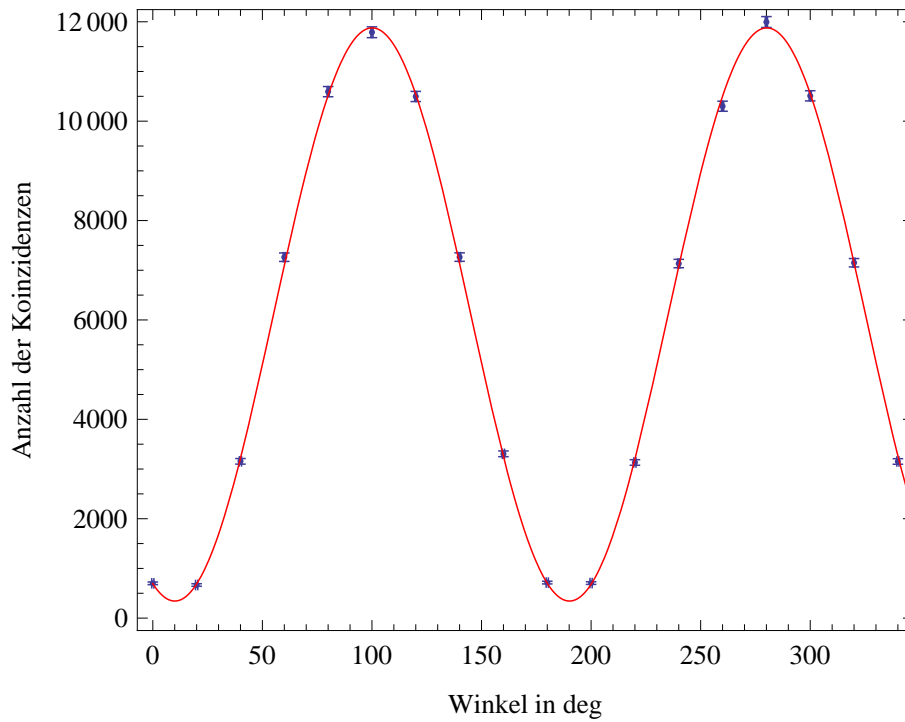


Abbildung 7: Auftragung der Koinzidenzen über α bei $\beta = 90^\circ$

Für $N(\alpha, 135^\circ)$ ergab der Fit (siehe Abb. 8):

$$N(\alpha, 135^\circ) = 11150 \cdot \cos^2 [0.01746 \cdot (\alpha - 135^\circ) + 9.283] + 355.5 \quad (18)$$

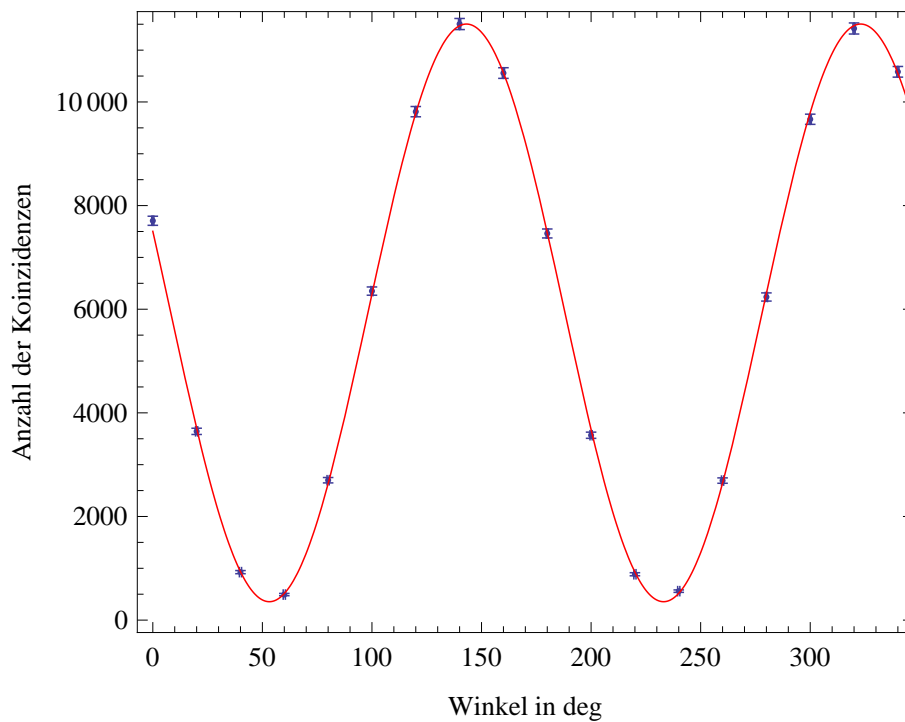


Abbildung 8: Auftragung der Koinzidenzen über α bei $\beta = 135^\circ$

Für die Michelson-Kontraste ergibt sich:

$$V_{Michelson}(0^\circ) = 0.971 \pm 0.009 \quad (19)$$

$$V_{Michelson}(45^\circ) = 0.921 \pm 0.070 \quad (20)$$

$$V_{Michelson}(90^\circ) = 0.944 \pm 0.007 \quad (21)$$

$$V_{Michelson}(135^\circ) = 0.940 \pm 0.006 \quad (22)$$

Der Michelson-Kontrast liegt relativ hoch, im erwarteten Bereich.

Die Photonenpaardetektionseffizienzen berechnen sich zu:

$$\eta(0^\circ) = (8.37 \pm 0.02) \cdot 10^{-3} \quad (23)$$

$$\eta(45^\circ) = (8.92 \pm 0.03) \cdot 10^{-3} \quad (24)$$

$$\eta(90^\circ) = (9.76 \pm 0.03) \cdot 10^{-3} \quad (25)$$

$$\eta(135^\circ) = (8.96 \pm 0.03) \cdot 10^{-3} \quad (26)$$

Die Detektionseffizienz ist mit $\eta < 1\%$ recht gering.

4.5 Berechnung des Bellwertes

Der Bellwert berechnet sich wie folgt:

$$S = E(\alpha, \beta) - E(\alpha, \beta') + E(\alpha, \beta') + E(\alpha', \beta') \quad (27)$$

Wobei E eine definiert ist als:

$$E(\alpha, \beta) = P_{VV}(\alpha, \beta) + P_{HH}(\alpha, \beta) - P_{VH}(\alpha, \beta) - P_{HV}(\alpha, \beta) \quad (28)$$

$E(\alpha, \beta)$ kann offensichtlich Werte von -1 bis $+1$ annehmen. $+1$ steht für vollständige Übereinstimmung der Polarisation, -1 für keine Übereinstimmung.

$E(\alpha, \beta)$ ergibt sich folglich als Summe der Wahrscheinlichkeiten durch ($\alpha_\perp := \alpha + 90^\circ$, $\beta_\perp := \beta + 90^\circ$):

$$E(\alpha, \beta) = \frac{N(\alpha, \beta) + N(\alpha_\perp, \beta_\perp) - N(\alpha, \beta_\perp) - N(\alpha_\perp, \beta)}{N(\alpha, \beta) + N(\alpha_\perp, \beta_\perp) + N(\alpha, \beta_\perp) + N(\alpha_\perp, \beta)} \quad (29)$$

Der Fehler von S ergibt sich durch

$$\Delta S = \sqrt{\sum_{i=1}^{16} N_i \cdot \left(\frac{\partial S}{\partial N_i} \right)^2} \quad (30)$$

Der Bellwert S wird im Folgenden einmal mit separat aufgenommenen Messpunkten und einmal mit virtuellen Messpunkten, die sich aus dem Fits ergeben. Es ist notwendig, die vier Winkel α, α', β und β' zu wählen. Wählt man die Winkel zu $\alpha = 0^\circ, \alpha' = 45^\circ, \beta = 22.5^\circ$ und $\beta' = 67.5^\circ$, so ist die Ungleichung nach den quantenmechanischen Voraussagen maximal verletzt. Damit wir die Bellsche Ungleichung mit großer Sicherheit verletzen, haben wir diese Winkeleinstellung gewählt.

4.5.1 Mit Messpunkten

Die für die Berechnung relevanten Messwerte sind in der folgenden Tabelle zusammengefasst.

N	22.5°	67.5°	112.5°	157°
0°	20490	2334	8988	26166
45°	25625	20498	2520	8012
90°	7785	26998	21751	2246
135°	2173	9282	28442	20463

Der Bellwert ergibt sich aus den gemessenen Daten zu:

$$S = 2.519 \pm 0.006 \quad (31)$$

Offensichtlich ist die Bellgleichung verletzt. Der nach lokal, realistischen Theorien erlaubte Wert ist mit der 86 - fachen Standardabweichung übertroffen worden.

4.5.2 Mit Daten aus den Fits

Die Werte wurden den \cos^2 -Fits zu den Messungen der Anzahl der Koinzidenzen in Abhängigkeit der Polarisatorstellung entnommen (siehe Kapitel 4.3).

N	Fit-Gleichung	22.5°	67.5°	112.5°	157°
0°	(15)	10636	3111	819	8346
45°	(16)	8014	10546	3527	937
90°	(17)	880	8534	11345	3696
135°	(18)	3259	1039	8608	10815

Aus den Daten der Fits ergibt sich der Bellwert S zu:

$$S = 2.533 \pm 0.018 \quad (32)$$

Offensichtlich ist die Bellgleichung wiederum verletzt. Der nach lokal, realistischen Theorien erlaubte Wert ist mit der 29 - fachen Standardabweichung übertroffen worden, was immer noch ein sehr beachtlicher Wert ist.

5 Fazit

Im Versuch wurde ein Bellwert von $S \approx 2.53$ erreicht. Der theoretisch gewonnene, maximale Bellwert liegt bei $S = 2\sqrt{2} \approx 2.8284$. Er tritt für die im Versuch verwendeten Winkel auf. Dieser Wert konnte nicht ganz erreicht werden. Das kann darauf zurückgeführt werden, dass der Bellzustand nicht ideal präpariert war, wie in Abb. 4 zu sehen ist. Dennoch hat der erreichte Grad der Verschwänkung ausgereicht um eine Verletzung der Bellgleichung nachzuweisen. Es konnte gezeigt werden, dass die Quantenmechanik die Bellgleichung in der Formulierung von CHSH verletzt. Damit konnte bestätigt werden, dass die Photonen der Quantenmechanik gehorchen. Eine physikalisch richtige Beschreibung der Welt muss folglich zumindest in Teilen entweder nichtlokal oder nicht realistisch sein.

Literatur

- [1] Fry, Walther: Quantum [Un]speakables - From Bell to Quantum Information, Texas, U.S.A. 2001.
- [2] Haken, Wolf: Atom- und Quantenphysik. Stuttgart ⁸2004.
- [3] Janzing, Dominik: Mit Quanten ist zu rechnen. Physik Journal,
- [4] Dietrich Dehlinger and M. W. Mitchell: Entangled photons, nonlocality, and Bell inequalities in the undergraduate laboratory, Portland, 2002. 11/2005.

6 Messdaten

6.1 Leistungskennlinie

I / mA	P / mW
0	0
5	12.8
10	29.2
15	46.
20	64.5
25	86.7
30	121.
35	204.
36	238
37	294
38	401
39	713
40	1660
41	2940
42	4310
43	5730
44	7170
45	8560
50	15 400
55	22 400
60	29 400
65	36 300
70	43 200

Abbildung 9: Laserleistung in Abhängigkeit des Stroms

6.2 Bellzustand

Winkel / deg	Zählrate 1	Zählrate 2	Koin.	Zufällige Koin.
0	80 437	114 429	1042	24
10	96 202	127 307	1875	28
20	103 281	133 751	2372	18
30	108 162	140 983	2565	30
40	93 879	123 254	1917	19
50	81 756	110 075	1082	13
60	65 227	86 778	278	17
70	62 916	90 782	26	12
80	68 107	94 557	319	12
90	80 566	108 062	1021	11

Abbildung 10: Daten zum ermitteln des Maximums, Variation von θ , $\alpha = \beta = 0^\circ$

Winkel / deg	Zählrate 1	Zählrate 2	Koin .	Zufällige Koin .
25	69 093	90 052	1682	18
26	69 080	90 166	1648	13
27	71 840	93 651	1694	25
28	74 133	95 773	1794	16
29	71 569	92 231	1627	16
30	70 923	91 479	1667	15
31	73 397	94 218	1683	17
32	69 211	89 780	1645	15
33	70 824	90 613	1600	24
34	64 511	84 117	1479	14
35	69 089	89 857	1522	21

Abbildung 11: Feinjustage des Maximums, Variation von θ , $\alpha = \beta = 0^\circ$

Winkel / deg	Zählrate 1	Zählrate 2	Koin .	Zufällige Koin .
0	60 684	82 678	1022	16
10	55 095	74 585	984	5
20	54 563	73 993	945	17
30	56 545	75 129	986	11
40	55 409	75 408	1105	8
50	55 774	74 412	1117	13
60	57 633	77 560	1300	21
70	53 828	71 129	1220	11
80	58 483	76 954	1288	15
90	55 729	73 203	1326	13

Abbildung 12: Bellzustand validieren, $\theta = 5.5$

Winkel / deg	Zählrate 1	Zählrate 2	Koin .	Zufällige Koin .
90	54 654	70 903	1118	15
90	57 203	73 496	1096	16
70	54 434	71 282	1134	5
60	52 710	69 362	1068	10
50	55 713	74 170	1076	15
50	56 545	74 509	1101	10
40	57 759	76 505	1081	13
30	56 554	75 534	1019	9
20	59 101	79 232	1025	17
10	60 882	79 759	1027	9
0	57 525	75 138	1025	15

Abbildung 13: Bellzustand validieren, $\theta = 7.0$

6.3 Polarisationskorrelation und Photonenpaardetektionseffizienz

Winkel / deg	Zählrate 1	Zählrate 2	Koin .	Zufällige Koin .
0	305 473	409 663	5813	61
0	300 856	404 955	5599	76
10	303 260	404 957	5891	58
10	300 565	402 592	5771	68
20	310 387	403 337	5671	64
20	310 775	406 039	5649	71
30	311 788	401 521	5137	75
30	308 262	399 318	4986	71
40	298 652	380 412	4128	74
40	309 128	393 849	4259	70
50	311 169	386 413	3278	75
50	310 416	383 898	3259	75
60	309 351	378 522	2366	76
60	309 859	378 722	2346	67
70	311 380	377 372	1417	68
70	309 121	373 888	1369	65
80	308 587	374 345	730	78
80	309 452	372 686	691	67
90	309 181	372 335	294	60
90	308 808	373 101	272	66
100	306 252	375 036	189	73
100	307 796	375 722	177	71
110	312 051	383 536	401	73
110	304 602	376 383	356	71
120	307 459	387 233	922	77
120	308 654	386 368	950	67
130	308 209	394 667	1694	78
130	309 626	396 944	1682	72
140	309 514	399 766	2548	77
140	306 584	393 748	2623	71
150	309 230	402 568	3765	74
150	312 089	406 381	3649	84
160	304 437	399 385	4430	71
160	307 074	402 566	4387	80
170	300 402	396 988	5221	65
170	301 948	396 813	5230	69
180	297 348	392 908	5587	62
180	292 258	386 729	5505	71
190	257 579	335 774	4870	62
190	302 403	392 425	5771	58
200	295 135	379 511	5468	56
200	305 017	388 295	5554	103
210	307 575	380 073	4886	72
210	306 998	382 231	4847	73
220	306 782	374 391	4090	77
220	308 126	375 853	4091	54
230	307 346	368 181	3289	48
230	309 725	371 408	3374	58
240	307 626	365 184	2306	87
240	306 109	361 447	2279	59
250	309 060	362 698	1422	62
250	310 544	362 289	1398	74
260	327 170	395 451	710	85
260	308 689	361 210	649	70
270	302 814	358 494	257	65
270	286 297	338 727	250	73
280	302 081	361 034	149	60
280	300 466	359 318	166	55
290	300 517	365 522	378	63
290	301 445	365 613	354	65
300	299 547	419 136	757	69
300	301 669	371 129	922	71
310	300 037	379 179	1663	53
310	300 223	378 544	1694	56
320	302 568	417 069	2422	66
320	295 859	381 479	2560	74
330	300 902	393 201	3599	62
330	299 081	390 513	3582	68
340	298 658	391 566	4481	64
340	299 565	393 715	4473	60
350	310 384	409 117	5260	71
350	289 714	382 623	4920	57

Abbildung 14: Polarisationskorrelation $\beta = 0^\circ$

Winkel / deg	Zählrate 1	Zählrate 2	Koin .	Zufällige Koin .
0	274 126	397 459	2136	62
0	272 137	393 995	1996	63
20	279 902	389 710	3940	53
20	280 203	393 822	3938	79
40	274 523	375 319	5136	43
40	283 502	381 822	5370	74
60	281 962	369 297	5671	62
60	281 318	368 180	5554	48
80	280 239	363 394	4725	73
80	279 013	359 674	4677	50
100	278 984	365 091	2894	61
100	281 283	367 434	3016	52
120	282 772	379 918	1290	72
120	277 998	372 941	1243	55
140	280 253	386 205	296	64
140	280 415	387 222	370	62
160	283 796	400 066	650	65
160	278 004	389 645	607	83
180	278 678	389 467	2002	61
180	280 160	394 123	2043	70
200	279 266	382 989	3785	70
200	277 206	379 253	3730	63
220	274 706	365 745	5217	62
220	273 567	364 077	5097	65
240	282 167	362 517	5523	63
240	275 971	353 433	5388	46
260	280 631	357 738	4599	60
260	281 073	357 997	4656	53
280	278 530	359 694	2981	57
280	278 760	359 833	3007	70
300	271 593	365 161	1223	54
300	266 826	358 788	1195	49
320	271 449	385 284	327	50
320	271 578	378 153	323	55
340	268 008	385 708	610	63
340	266 507	386 484	658	65

Abbildung 15: Polarisationskorrelation $\beta = 45^\circ$

Winkel / deg	Zählrate 1	Zählrate 2	Koin .	Zufällige Koin .
0	272 729	388 473	416	65
0	271 482	388 146	412	63
20	270 355	379 540	415	54
20	268 171	375 781	367	62
40	258 949	350 400	1544	51
40	266 380	362 145	1706	44
60	266 162	349 106	3685	62
60	273 313	356 684	3700	60
80	273 189	352 608	5405	50
80	265 709	346 015	5297	58
100	270 662	353 157	6006	62
100	266 634	348 813	5900	55
120	265 970	359 341	5293	57
120	266 078	359 286	5316	55
140	265 375	368 288	3748	67
140	265 575	369 265	3633	49
160	269 921	383 418	1719	59
160	268 272	379 921	1706	60
180	270 241	381 168	425	58
180	273 153	386 767	407	59
200	271 024	373 623	424	57
200	268 109	369 946	404	66
220	269 606	358 292	1635	65
220	266 880	355 925	1616	54
240	272 872	349 214	3635	49
240	270 153	347 311	3607	58
260	270 426	344 105	5224	52
260	267 657	341 346	5187	58
280	269 607	348 797	6051	64
280	270 323	350 300	6062	54
300	271 328	365 462	5235	52
300	267 073	358 844	5390	63
320	267 934	373 793	3545	63
320	270 667	378 170	3726	57
340	270 621	389 363	1645	66
340	270 123	389 225	1625	52

Abbildung 16: Polarisationskorrelation $\beta = 90^\circ$

Winkel / deg	Zählrate 1	Zählrate 2	Koin .	Zufällige Koin .
0	284 262	369 011	3787	58
0	298 111	387 729	4048	70
20	301 797	381 382	1893	66
20	299 263	381 050	1898	82
40	303 309	372 094	529	78
40	301 401	368 714	538	63
60	299 063	355 371	307	51
60	303 722	360 284	323	86
80	302 252	355 989	1439	63
80	303 521	356 021	1394	70
100	301 714	357 839	3196	59
100	301 790	358 260	3263	50
120	305 764	372 101	4940	75
120	303 250	369 223	5013	65
140	302 865	378 411	5840	59
140	301 883	377 718	5789	66
160	300 695	382 410	5377	63
160	297 635	377 801	5304	60
180	299 570	378 497	3751	82
180	301 876	381 555	3850	57
200	296 210	368 344	1834	65
200	299 826	373 207	1861	62
220	301 329	361 762	500	66
220	297 900	358 750	517	66
240	292 979	342 085	348	61
240	296 947	346 269	326	54
260	297 801	345 781	1405	78
260	296 773	343 739	1422	56
280	297 048	348 434	3136	70
280	297 771	348 751	3240	70
300	298 850	362 631	4890	60
300	297 299	361 419	4905	69
320	297 200	378 534	5694	70
320	296 187	373 722	5854	60
340	293 197	381 819	5347	71
340	293 295	383 539	5368	62

Abbildung 17: Polarisationskorrelation $\beta = 135^\circ$

6.4 Bellwert

Winkel / deg	Zählrate 1	Zählrate 2	Koin .	Zufällige Koin .
0	283 872	392 858	4102	71
0	280 426	390 032	4172	62
0	283 447	394 566	4165	49
0	280 449	389 128	4160	73
0	281 327	390 351	4207	61
45	278 080	365 572	5162	61
45	283 976	369 428	5270	61
45	277 520	362 505	5159	53
45	280 903	365 284	5127	59
45	283 855	367 600	5203	62
90	278 384	351 041	1571	46
90	280 730	353 612	1635	56
90	277 724	351 290	1645	61
90	279 306	350 922	1597	61
90	281 012	352 888	1618	57
135	282 120	376 022	499	61
135	279 712	373 928	505	73
135	273 423	368 399	466	74
135	272 925	368 783	530	65
135	276 585	372 053	510	64

Abbildung 18: Messpunkte zur Bestimmung des Bellwerts, $\beta = 22.5^\circ$

Winkel / deg	Zählrate 1	Zählrate 2	Koin .	Zufällige Koin .
0	266 086	389 665	520	68
0	271 469	394 060	530	52
0	268 292	389 819	557	61
0	270 108	394 486	502	69
0	271 682	398 264	540	65
45	263 798	363 307	4180	57
45	265 438	366 482	4157	53
45	262 428	360 619	4225	67
45	263 845	364 657	4202	67
45	258 772	356 977	4022	44
90	256 211	344 494	5444	56
90	263 009	351 157	5520	56
90	262 642	348 443	5371	48
90	263 592	352 157	5567	50
90	262 513	350 408	5354	48
135	262 035	371 876	1862	64
135	262 263	371 540	1928	46
135	260 415	369 235	1898	47
135	262 814	372 942	1978	55
135	263 769	371 918	1889	61

Abbildung 19: Messpunkte zur Bestimmung des Bellwerts, $\beta = 67.5^\circ$

Winkel / deg	Zählrate 1	Zählrate 2	Koin .	Zufällige Koin .
0	284 779	390 987	1866	71
0	288 214	392 882	1910	69
0	287 386	392 015	1851	70
0	284 730	389 004	1861	66
0	285 733	390 306	1850	74
45	280 369	359 711	587	55
45	285 475	365 525	603	50
45	280 333	361 064	556	59
45	284 803	363 275	520	59
45	288 883	367 530	541	64
90	282 635	349 047	4344	48
90	288 367	355 427	4486	65
90	286 527	353 148	4429	72
90	286 288	353 385	4459	49
90	287 552	356 584	4331	64
135	287 417	377 855	5682	53
135	283 054	373 363	5714	71
135	287 772	376 960	5653	55
135	284 373	377 240	5720	67
135	293 972	389 364	5967	48

Abbildung 20: Messpunkte zur Bestimmung des Bellwerts, $\beta = 112.5^\circ$

Winkel / deg	Zählrate 1	Zählrate 2	Koin .	Zufällige Koin .
0	299 529	387 531	5433	71
0	297 483	384 388	5406	55
0	287 720	371 258	5103	53
0	298 433	384 643	5220	58
0	296 557	385 274	5312	71
45	296 669	359 703	1600	48
45	297 384	360 154	1668	61
45	298 677	360 909	1656	60
45	298 559	362 016	1715	52
45	296 579	361 660	1648	54
90	289 830	339 502	502	62
90	295 091	344 215	494	62
90	297 740	349 162	530	65
90	301 301	351 108	524	65
90	297 612	347 945	502	52
135	294 071	366 767	4238	46
135	294 130	368 295	4022	59
135	296 132	368 309	4130	58
135	296 143	371 010	4272	59
135	292 787	366 917	4080	57

Abbildung 21: Messpunkte zur Bestimmung des Bellwerts, $\beta = 157.5^\circ$