

---

# 1.1: Magnetfeldmessung

---

Maximilian Rudolf Lubba

Matrikel-Nr.: [REDACTED]  
[REDACTED]

Benjamin Wolfgang Kosmala

Matrikel-Nr.: [REDACTED]  
[REDACTED]

Betreuer: Jonas Pforr

Versuch durchgeführt am: 8. Januar 2018

Abgabedatum: 30. Januar 2018



TECHNISCHE  
UNIVERSITÄT  
DARMSTADT

Physikalisches Praktikum  
für Fortgeschrittene

Abteilung C

Hiermit versichern wir, das vorliegende Protokoll für das Physikalische Praktikum für Fortgeschrittene ohne Hilfe Dritter nur mit den angegebenen Quellen und Hilfsmitteln angefertigt zu haben. Alle Stellen, die aus Quellen entnommen wurden, sind als solche kenntlich gemacht. Diese Arbeit hat in gleicher oder ähnlicher Form noch keiner Prüfungsbehörde vorgelegen.

Darmstadt, den 30. Januar 2018,

\_\_\_\_\_  
Maximilian Rudolf Lubba

\_\_\_\_\_  
Benjamin Wolfgang Kosmala

---

1	Einleitung	2
2	Versuchsziel	2
3	Theoretische Grundlagen	2
3.1	Magnete	2
3.1.1	Diamagnetismus	2
3.1.2	Paramagnetismus	2
3.1.3	Ferromagnetismus	3
3.1.4	Hysterese	3
3.2	Hall-Effekt	3
3.3	Magnetische Multipole	5
3.3.1	Dipolmagnet	5
3.3.2	Quadrupolmagnet	6
3.4	Bewegung von geladenen Teilchen im elektromagnetischen Feld	7
3.4.1	Magnetische Länge	7
3.4.2	Numerische Integrationsmethoden (Trapezformel)	8
3.5	Elektromagnetische Induktion einer Spule	9
3.6	Charakterisierung von Multipolkomponenten	9
3.7	Diskrete Fourier Transformation (DFT)	11
4	Versuchsdurchführung	12
4.1	Quadrupol	12
4.1.1	Ausrichtung/Messvorbereitung	12
4.1.2	Messung der Gradientenprofile	13
4.2	Auswertung zum Quadrupol	13
4.2.1	Remanenzgradientenprofile	13
4.2.2	Restliche Gradientenprofile und magnetische Länge	15
4.2.3	Strom-Gradienten-Kalibrierung	17
4.3	Steerer	17
4.3.1	Ausrichtung/Messvorbereitung	17
4.3.2	Vermessung des Magnetfelds	17
4.4	Auswertung zum Steerer	18
4.4.1	Bestimmung des feldglatten Bereichs	18
4.4.2	Bestimmung der Windungszahl	19
4.4.3	Magnetfeld-Strom-Kalibrierung	19
4.5	Multipolkomponenten	20
4.5.1	Ausrichtung/Messung	20
4.6	Auswertung zur Messung mit einer rotierenden Spule	21
4.6.1	Bestimmung der Multipolanteile des Quadrupols	21
5	Fazit	22
6	Quellenverzeichnis	23

---

## 1 Einleitung

---

Für physikalische Grundlagenforschung ist die Kenntnis von Magneten unersetzlich. Um Teilchenwechselwirkungen untersuchen zu können, bedarf es einer hohen Auflösung der Effekte, die an eine hohe kinetische Energie der Teilchen geknüpft ist. Da viele Elementarteilchen oder Ionen eine Ladung besitzen, ist durch Magnetfelder eine effektive Möglichkeit der gerichteten Beschleunigung dieser Teilchen gegeben und eine Untersuchung ihrer Wechselwirkungen möglich.

Praktischere Anwendung finden Magnete in vielen Alltagsbereichen: In der Zugtechnik basieren Bremsen oder sogar der Zug selbst (Magnetschwebbahn) auf Magneten. Weiterhin besteht fast jedes elektronische Bauteil des Alltags (Festplatten, Handys und Kreditkarten) zu Teilen aus Magneten. Zuletzt sei noch erwähnt, dass auch in Antriebstechnik oft Magnete zum Einsatz kommen, etwa in Elektromotoren.

---

## 2 Versuchsziel

---

In diesem Versuch werden zwei Magnete untersucht: Ein Dipol- (auch Steerer genannt) und ein Quadrupolmagnet. Beim Dipol wird sein Magnetfeldverlauf an verschiedenen Orten bei verschiedenen Spulenströmen untersucht. Der Quadrupol wird auf sein Gradientenprofil bei verschiedenen Spulenströmen untersucht und seine Multipolkomponenten ermittelt.

---

## 3 Theoretische Grundlagen

---

### 3.1 Magnete

---

Da in diesem Versuch Messmethoden und Eigenschaften von Magnetfeldern untersucht werden sollen, ist es hilfreich, zu verstehen, was ein Magnet auf mikroskopischer Ebene ist, wie sich dessen Eigenschaften voneinander unterscheiden und auf das makroskopische Magnetfeld auswirken.

Grundsätzlich entsteht ein Magnetfeld dadurch, dass sogenannte Elementarmagnete (Elektronen) eine gemeinsame Ausrichtung aufweisen und ihre magnetischen Momente das Magnetfeld erzeugen. Ein magnetisches Moment  $\vec{\mu}_s$  ist gegeben durch:

$$\vec{\mu}_s = g_e \mu_B \frac{\vec{s}}{\hbar} \quad (1)$$

Hierbei ist  $g_e$  der Landé-Faktor,  $\mu_B$  das Bohr'sche Magneton,  $\vec{s}$  der Spin des Elektrons und  $\hbar$  das Planck'sche Wirkungsquantum. Die Richtung der Spins gibt die Richtung des Magnetfelds vor, wobei diese immer so orientiert sind, dass sie geschlossene Verläufe bilden. Es gibt keine magnetischen Monopole, sondern nur Dipole bzw. Magnete mit einer geraden Anzahl an Polen, wobei die eine Hälfte die sogenannten Süd- und die andere Hälfte die Nordpole kennzeichnet. Feldlinien verlaufen immer von Nord- zu Südpolen. Beispiele dafür werden im Laufe dieser Versuchsvorbereitung an passender Stelle zu finden sein.

Entscheidend ist also u. a. die Ausrichtung der Elektronenspins. Hinzu kommen noch Materialeigenschaften, die zu verschiedenen Arten von Magnetisierung eines Materials führen:

---

#### 3.1.1 Diamagnetismus

---

Beim Diamagnetismus liegt im Material kein magnetisches Moment vor, d. h., die einzelnen magnetischen Momente summieren sich zu Null.

Legt man ein äußeres Magnetfeld an, so werden die Elementarmagnete ausgerichtet und es bildet sich gemäß der Lenz'schen Regel ein dem äußeren entgegen gerichtetes Magnetfeld aus und schwächt es ab. Dieser Effekt tritt auch bei den nachfolgenden Arten der Magnetisierung auf, spielt bei diesen aber keine Rolle, weil andere Effekte wesentlich stärker wirken. Allgemein sind also nur nicht para- oder nicht ferromagnetische Materialien diamagnetisch.

Wird das äußere Magnetfeld entfernt, so verschwindet auch das innere Magnetfeld eines Diamagneten.

---

#### 3.1.2 Paramagnetismus

---

Beim Paramagnetismus liegt (zu einem Zeitpunkt betrachtet) ein resultierendes magnetisches Moment vor, allerdings führt die thermische Bewegung der Elektronen zu einer ständigen Neuausrichtung der Momente, sodass das resultierende Moment im zeitlichen Mittel verschwindet.

Das Anlegen eines äußeren Magnetfeldes führt zu einer Ausrichtung der Einzelmomente parallel zum außen angelegten Feld und wegen des resultierenden Gesamtmoments wird der Effekt des Diamagnetismus übertroffen.

Schaltet man das äußere Magnetfeld ab, so führt die thermische Bewegung dazu, dass sich die Momente wieder zu Null mitteln.

---

---

### 3.1.3 Ferromagnetismus

---

Beim Ferromagnetismus liegt auch ein resultierendes magnetisches Moment vor, wobei hier die Momente lokal aneinander gekoppelt sind. Entsprechende Zonen nennt man auch weiß'sche Bezirke. Wegen ihrer statistischen Verteilung mitteln sich auch hier die Momente der Bezirke zu Null.

Legt man ein äußeres Magnetfeld an, so richten sich die Bezirke entsprechend dem äußeren Feld aus und führen zu einer Magnetisierung des Materials.

Wird das äußere Magnetfeld abgeschaltet, so bleibt wegen der Kopplung der Momente ein Großteil des ursprünglichen Gesamtmoments erhalten. Die thermische Bewegung überwiegt hier nicht.

---

### 3.1.4 Hysterese

---

Das sich beim Ferromagnetismus ergebende magnetische Feld hängt dabei nicht nur vom außen anliegenden Magnetfeld, sondern auch vom Startwert des materialinternen Feldes bei Anlegen des äußeren Felds ab, d. h. von seiner Vorgeschichte. Ein solches Verhalten bezeichnet man allgemein als Hysterese. Typische Verläufe sind in Abbildung 1 und 2 einzusehen:

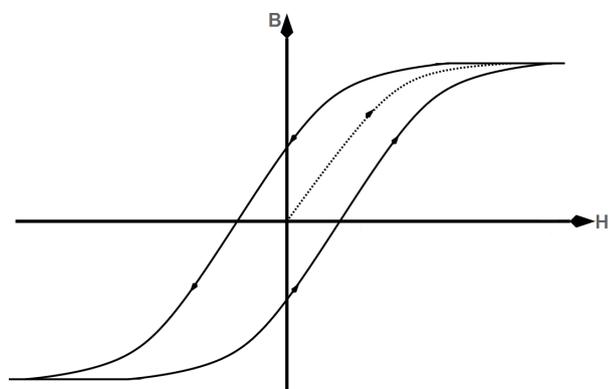


Abbildung 1: Möglicher Magnetisierungsverlauf ohne Vorgeschichte [1, bearbeitet]

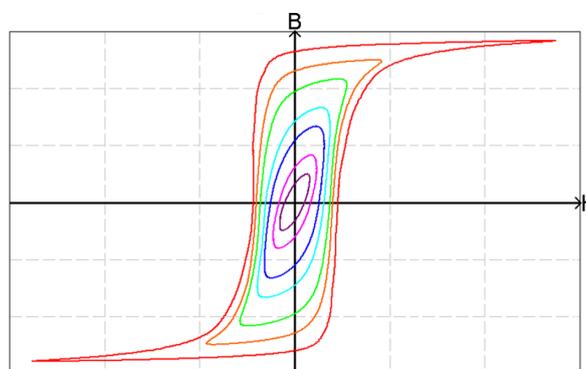


Abbildung 2: Mögliche Magnetisierungsverläufe bei variiertem äußeren Feld [2, bearbeitet]

Dabei kennzeichnen die waagerechten Achsen den Betrag der außen anliegenden Magnetfeldstärke  $\vec{H}$  (in den Grafiken  $H$ ) und die senkrechten Achsen den Betrag des materialeigenen Magnetfelds  $\vec{B}$  (in den Grafiken  $B$ ). Da nur Beträge betrachtet werden, werden die Vektorpfeile i. F. weggelassen.

In Abbildung 1 ist die Situation dargestellt, dass keine Vorgeschichte des Materials vorliegt. Dies z. B. dann der Fall, wenn das Material über seine Curie-Temperatur erhitzt wurde, bei der thermische Effekte die Kopplung innerhalb der weiß'schen Bezirke überwiegt, oder wenn ein oszillierendes, schwächer werdendes äußeres Magnetfeld angelegt wird. Wird vom Nullpunkt aus ein  $H$ -Feld angelegt, so folgt das  $B$ -Feld der gestrichelten Linie. In diesem Fall führt das  $H$ -Feld zur Sättigung des  $B$ -Felds, angedeutet durch den sehr waagerechten Verlauf oben rechts. Zu einer Sättigung muss es kommen, da kein größeres Magnetfeld als das durch alle Elementarmagnete erzeugte Feld vorliegen kann. Ein Abschalten des  $H$ -Felds hat nun zur Folge, dass das  $B$ -Feld der Pfeilrichtung bis zum Schnitt mit der  $B$ -Achse folgt und dort verbleibt. Dies ist der beim Ferromagnetismus erklärte Effekt und wird auch als Remanenz bezeichnet. Ein erneutes Einschalten eines umgepolten  $H$ -Felds führt entsprechend der Pfeillinie zum linken Sättigungsbereich. Erneutes Umpolen führt durch einen negativen Remanenzwert zum Bereich oben rechts. In Abbildung 2 ist nun die Situation gezeigt, in der der maximale Wert vom  $H$ -Feld variiert wird, was zu den verschiedenen Verläufen führt. Eine genauere Diskussion dazu findet sich in Kapitel 4.2.1.

---

## 3.2 Hall-Effekt

---

Ein grundlegender und in diesem Versuch genutzter Effekt zur Bestimmung von zeitunabhängigen Magnetfeldstärken ist der Hall-Effekt. Um ihn beobachten zu können, legt man eine Spannung  $U$  an zwei gegenüberliegende Seiten einer quaderförmigen leitenden Platte an und auf einer der Oberflächen, an denen keine Spannung anliegt, senkrecht eine magnetische Flussdichte  $\vec{B}$  an. Die Situation ist in folgender Abbildung dargestellt:

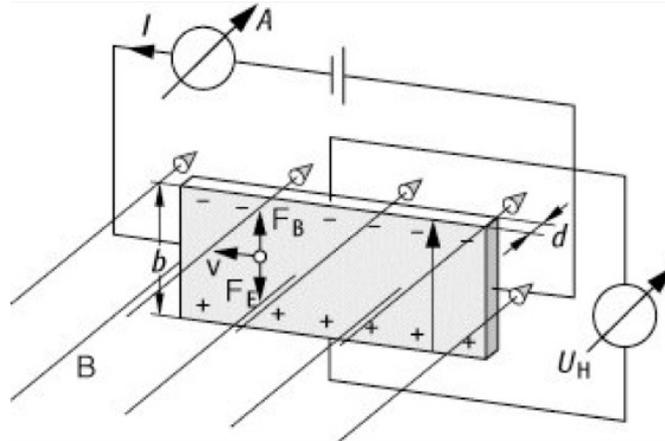


Abbildung 3: Aufbau zur Messung des Halleffekts. Zu sehen ist eine quaderförmige, leitende Platte, an der eine Spannung angelegt ist. Die so über eine Driftgeschwindigkeit verfügenden Ladungsträger werden von einem außen anliegenden, stationären Magnetfeld beeinflusst. Es bildet sich ein Potential aus, über das Rückschlüsse auf das Magnetfeld gezogen werden können. [3]

Durch die anliegende Spannung bewegen sich Ladungsträger (hier Elektronen) der Ladung  $q$  mit einer Driftgeschwindigkeit  $\vec{v}_d$  (in Abbildung 3  $v$ ) von der einen Seite der Platte zur gegenüberliegenden. Auf diese bewegten Ladungsträger wirkt aufgrund des anliegenden Magnetfeldes die Lorentz-Kraft  $\vec{F}_L$  (in Abbildung 3  $F_B$ ). Dabei bilden gemäß rechter-Hand-Regel Magnetfeld, Driftgeschwindigkeit und Lorentzkraft ein Rechtssystem. Beschrieben wird dieser Vorgang durch:

$$\vec{F}_L = q (\vec{v}_d \times \vec{B}) \quad (2)$$

Die Elektronen werden also auf eine Seite der Platte (in Abbildung 3 ist dies die obere Seite) abgelenkt, sodass auf der einen Seiten ein Elektronenüberschuss und auf der anderen (relativ dazu) ein Elektronenmangel vorliegt. Die entstehende Anordnung kann als Plattenkondensator angesehen werden. Das entstehende elektrische Feld  $\vec{E}$  und die wirkende elektrostatische Kraft  $\vec{F}_E$  hängen zusammen über:

$$\vec{F}_E = q \vec{E} \quad (3)$$

Sie liegt antiparallel zur Lorentz-Kraft vor und wirkt ihrer Ablenkung entgegen. Für folgende Betrachtungen reicht es also aus, nur die Beträge der vorkommenden Größen zu betrachten, die durch Weglassen der Vektorpfeile gekennzeichnet seien. Drückt man weiter das elektrische Feld durch die Ausdehnung der leitenden Platte  $b$ , die senkrecht zu Magnetfeld und Driftgeschwindigkeit liegt, und die anliegende Hall-Spannung  $U_H$  aus, so erhält man insgesamt:

$$q v_d B = q \frac{U_H}{b} \quad (4)$$

Man nutzt weiter aus, dass der durch die Spannung  $U$  vorliegende Strom  $I$  durch

$$I = n q b d v_d \quad (5)$$

gegeben ist. Hierbei ist  $n$  die Ladungsträgerdichte der leitenden Platte und  $d$  eine weitere Ausdehnung der leitenden Platte, sodass  $d$  parallel zu  $B$  liegt. Man erhält so, wenn man nach  $U_H$  umstellt:

$$U_H = \frac{1}{nq} \frac{IB}{b} \quad (6)$$

$$= R_H \frac{IB}{b} \quad (7)$$

Hierbei stellt  $R_H$  die Hall-Konstante dar und ist eine Materialeigenschaft.

Man kann so aus der gemessenen Hall-Spannung die Stärke des stationären magnetischen Feldes bestimmen.

---

### 3.3 Magnetische Multipole

---

Analog zu elektrischen Feldern, die sich als Überlagerung der beteiligten Pole darstellen lassen, findet sich auch eine solche Darstellung für magnetische Felder. Die einzelnen Komponenten weisen für sie charakteristische Größen auf, die in diesem Versuch untersucht werden sollen.

Führt man für ein Magnetfeld eine Taylor-Entwicklung durch, so kann man die entstehenden Summanden also physikalisch zuordnen. Man spricht dann auch von Multipolen, wobei das Präfix der Bezeichnung die Anzahl an Polen angibt. Wie schon in Kapitel 3.1 erwähnt, treten magnetische Pole immer als Paare auf. Es handelt sich daher um geradzahlige Bezeichnungen.

Man findet für eine beliebige Komponente, die um den Ursprung entwickelt wird:

$$B_i(x) = B_i(0) + \left. \frac{\partial B_i}{\partial x} \right|_0 x + \frac{1}{2!} \left. \frac{\partial^2 B_i}{\partial x^2} \right|_0 x^2 + \frac{1}{3!} \left. \frac{\partial^3 B_i}{\partial x^3} \right|_0 x^3 + \dots \quad (8)$$

Die Komponenten können nun Summand für Summand einem Multipol zugeordnet werden, wobei in diesem Versuch zwei von Interesse sind.

---

#### 3.3.1 Dipolmagnet

---

Der erste Summand der Entwicklung charakterisiert den Dipolanteil mit:

$$B_i(0) = \frac{p}{e R} \quad (9)$$

Hierbei ist  $R$  der Krümmungsradius einer Bahn, die von einem Teilchen mit Ladung  $e$  und Impuls  $p$  beschrieben wird und die charakteristische Größe eines Dipolmagneten.

In diesem Versuch wird dieser Magnet durch ein Vierkanthrohr, welches an zwei gegenüberliegenden Seiten mit Spulen umwickelt ist, realisiert. Der Aufbau ist in Abbildung 4 und 5 einzusehen:

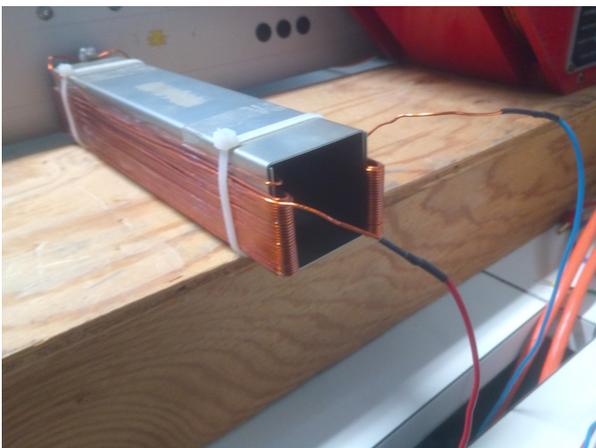


Abbildung 4: Aufbau des Dipolmagneten von oben

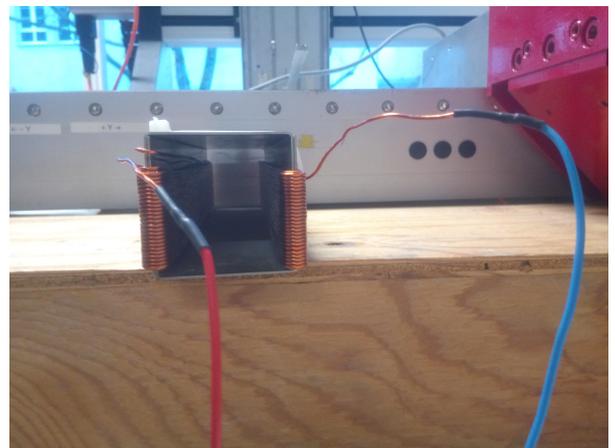


Abbildung 5: Aufbau des Dipolmagneten von vorne

Das entstehende Feld und Laborsystem sind in Abbildung 6 skizziert:

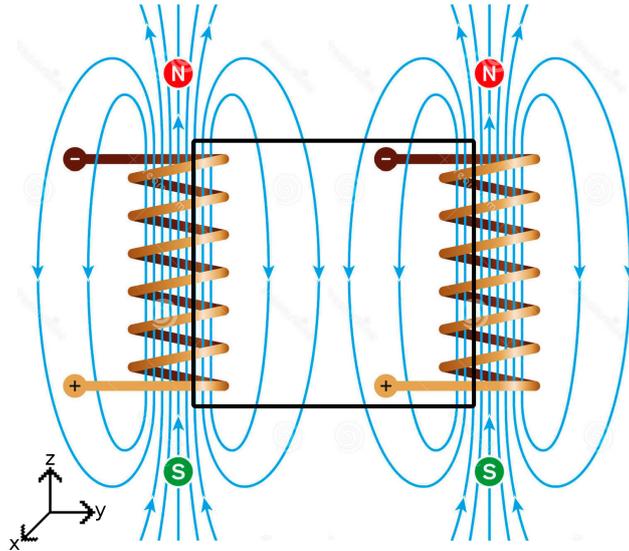


Abbildung 6: Magnetfeldverlauf (in blau) des Dipols im Versuch. Das Vierkantrrohr ist durch das schwarze Rechteck angedeutet, um dessen senkrechte Wände sich die Spulen wickeln, die das Magnetfeld erzeugen. Auf der Höhe der eingezeichneten Pfeile im schwarzen Rechteck verlaufen die Magnetfeldlinien nahezu parallel und stellen einen homogenen Bereich dar. Je näher am waagerechten Rand des Rechtecks die Feldlinien sich befinden, desto gekrümmter sind sie und stellen keinen homogenen Bereich mehr dar. Unten links finden sich die Richtungen des Laborsystems, der Nullpunkt kann von Messung zu Messung variieren. [4, bearbeitet]

Innerhalb des Rohres kann man die Feldlinien als parallel zueinander und somit als homogen ansehen. Mittels der vierten Maxwellgleichung bei stationären elektrischen Feldern

$$\vec{\nabla} \times \vec{H} = -\vec{J} \quad (10)$$

kann durch Integration über eine Fläche  $A$  und Ausnutzen des Stokes'schen Integralsatzes das Ampère'sche Gesetz hergestellt werden:

$$\oint_{\partial A} \vec{H} \, d\vec{s} = - \int_A \vec{J} \, d\vec{A} \quad (11)$$

Dieses angewendet auf die gegebene Anordnung (siehe Abbildung 7) ergibt unter Ausnutzung, dass für große Permeabilitäten  $\mu_r$  des Rohrmaterials das Magnetfeld im Material verschwindet, für die magnetische Flussdichte des homogenen Magnetfelds:

$$B_0 = \frac{\mu_0 I N}{s_0} \quad (12)$$

Hierbei ist  $\mu_0$  die magnetische Feldkonstante,  $I$  der Spulenstrom,  $N$  die Windungszahl der Spule, die das Magnetfeld erzeugt und  $s_0$  der Abstand der gegenüberliegenden Seiten, an denen das homogene Magnetfeld im rechten Winkel anliegt.

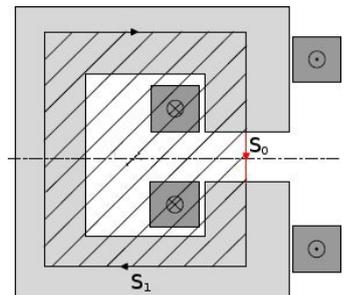


Abbildung 7: Integrationsweg des Dipolmagneten; Im grauen Materialbereich ist  $\mu_r \gg 1$  [5]

### 3.3.2 Quadrupolmagnet

Der zweite Summand der Entwicklung charakterisiert den Quadrupolanteil mit:

$$\left. \frac{\partial B_i}{\partial x} \right|_0 x = \frac{g p}{e} x \quad (13)$$

Hierbei ist  $g$  der Feldgradient des Quadrupols.  
 In diesem Versuch liegt folgender Quadrupol vor:



Abbildung 8: Vorderansicht des Quadrupols. Die Öffnung dient der Strahlführung [5]



Abbildung 9: Seitenansicht des Quadrupols. Zu sehen sind die Spulen zur Erzeugung des Magnetfelds

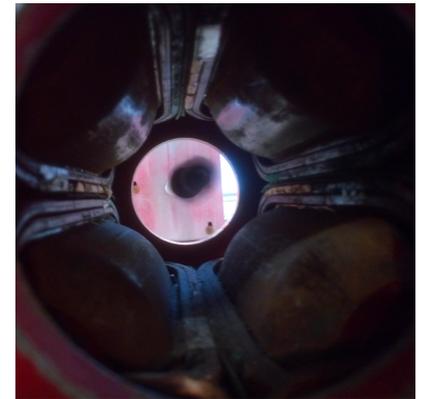


Abbildung 10: Polschuhe des Quadrupols. Das Objekt auf der anderen Seite ist die rotierende Spule

Der Feldlinienverlauf für den Quadrupol findet sich in Abbildung 15. Auch hier kann man das Ampère'sche Gesetz anwenden (siehe nebenstehende Abbildung). Das Koordinatensystem zeigt nur die Richtungen des Laborsystems an, wobei die  $x$ -Achse aus der Papierebene zeigt. Der tatsächliche Nullpunkt einer Messung variiert i. d. R. und muss nicht mit dem eingezeichneten identisch sein. Man erhält unter Ausnutzung, dass auch hier die Permeabilität  $\mu_r$  des Materials sehr groß ist, für den Gradienten des Quadrupols:

$$g = \frac{2\mu_0 NI}{r_0^2} \quad (14)$$

Dabei ist  $r_0$  der Abstand vom Quadrupolmittelpunkt zu einem Polschuh und  $I$  der am Quadrupol anliegende Strom und  $N$  die Windungszahl eines Polschuhs.

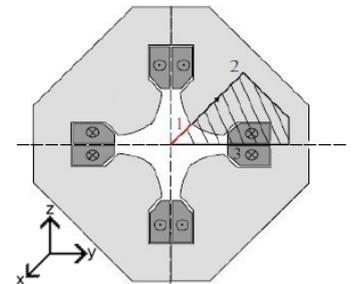


Abbildung 11: Integrationsweg eines Polschuhs des Quadrupolmagneten; Im grauen Materialbereich ist  $\mu_r \gg 1$  [5, bearbeitet]

### 3.4 Bewegung von geladenen Teilchen im elektromagnetischen Feld

Eingebaut in einen Teilchenbeschleuniger ergeben sich für Dipol- und Quadrupolmagnet folgende Anwendungsmöglichkeiten:

Wie schon im Kapitel des Dipolmagneten erwähnt, wird ein geladenes Teilchen auf eine Kreisbahn gezwungen. Entsprechend wird ein solcher Magnet in einen Beschleuniger eingebaut, wird dieser also der Umlenkung eines Strahls dienen.

Ein Quadrupol weist entlang seiner  $x$ -Richtung (Vgl. Abbildung 11) bei geeigneter Dimensionierung keine magnetische Flussdichte in dieser Richtung auf. Es liegt aber ein Magnetfeld in  $y$ - und  $z$ -Richtung an. Je weiter ein Teilchen von der Strahlachse entfernt ist, desto stärker wirkt das anliegende Magnetfeld darauf. Also übernimmt ein Quadrupol die Rolle einer Fokussierung des Strahlprofils.

#### 3.4.1 Magnetische Länge

Für Strahlführungskomponenten ist es dabei wichtig, ein Maß für die Länge der magnetischen Wirkung zu haben. Die Länge der Polschuhe ist dabei nicht ausreichend, da das Magnetfeld inhomogen am Rand abfällt und sich weiterhin auf geladene Teilchen auswirken kann.

Man nutzt als Näherung einen Flächenausgleich zur Bestimmung einer effektiven Magnetfeldlänge. Dazu wird für ein gegebenes Magnetfeldprofil  $B(r)$  das Integral

$$\int_{-\infty}^{\infty} B(r) dr \quad (15)$$

ausgewertet und mit einem Rechteck gleichgesetzt, dessen eine Kantenlänge dem Maximalausschlag  $B_{max}$  des Magnetfeldprofils entsprechen soll. Man erhält so die effektive Länge  $L_{eff}$  durch:

$$L_{eff} = \frac{1}{B_{max}} \int_{-\infty}^{\infty} B(r) dr \quad (16)$$

Dies ist in nachfolgender Abbildung veranschaulicht:

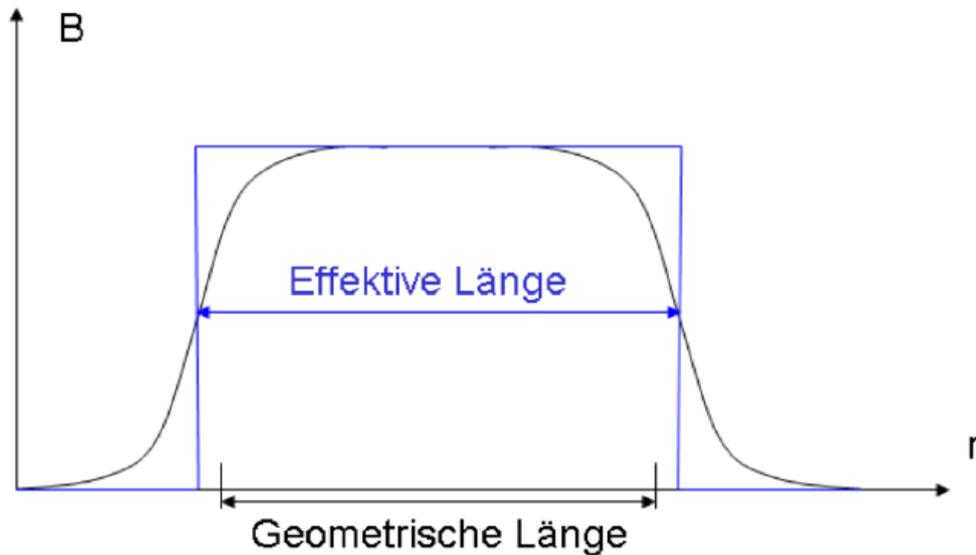


Abbildung 12: Zur Bestimmung der effektiven Länge eines Magneten [5]

### 3.4.2 Numerische Integrationsmethoden (Trapezformel)

Das Integral der effektiven Länge muss numerisch ausgewertet werden, da keine exakte Angabe von  $B(r)$  möglich ist. Man nutzt dazu die Trapezformel. Dabei wird die Fläche unter einem Graphen mit Trapezen genähert:

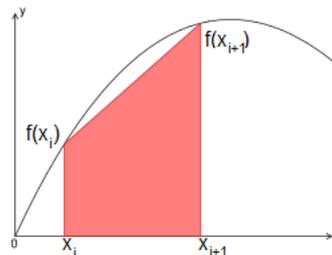


Abbildung 13: Veranschaulichung der Trapezformel [6]

Ist  $f(x_i)$  der Funktionswert an der Stelle  $x_i$  und, so erhält man für ein beliebiges Trapez:

$$A_{Trapez} = (x_{i+1} - x_i)f(x_i) + \frac{1}{2}(x_{i+1} - x_i)(f(x_{i+1}) - f(x_i)) \quad (17)$$

$$= \frac{1}{2}(x_{i+1} - x_i)(f(x_i) + f(x_{i+1})) \quad (18)$$

Die Summe der Trapeze für alle  $x_i$  eines Datensatzes liefert dann den Wert des Integrals:

$$\int_{x_0}^{x_{n-1}} f(x)dx = \frac{1}{2} \sum_{i=0}^{n-1} (x_{i+1} - x_i) (f(x_i) + f(x_{i+1})) \quad (19)$$

$$= \frac{1}{2}h \sum_{i=0}^{n-1} (f(x_i) + f(x_{i+1})) \quad (20)$$

Letztere Gleichung gilt dabei nur, falls alle Datenpunkte äquidistant zueinander sind und somit  $h := x_{i+1} - x_i = const.$  gesetzt werden kann.

---

### 3.5 Elektromagnetische Induktion einer Spule

---

In realen Magneten finden sich neben den gewünschten Multipolkomponenten auch andere, bauartbedingte Komponenten. Wie diese identifiziert werden, wird in Kapitel 3.6 geklärt. Zur Messung dieser Komponenten wird der Effekt der elektromagnetischen Induktion genutzt. Dieser und viele andere elektromagnetische Effekte lassen sich durch die Maxwell-Gleichungen erklären, die grundlegende Aussagen über das Verhalten von elektrischer Flussdichte und magnetischer Feldstärke treffen. Für die elektromagnetische Induktion ist die dritte Maxwellgleichung relevant:

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad (21)$$

Integriert man die differentielle Form über eine sich i. A. zeitlich veränderliche effektive Fläche (d. h., der Flächennormalenvektor ändert sich mit der Zeit), so kann man unter Ausnutzung des Stokes'schen Integralsatzes und Vertauschen von Integration mit dem Integral das Faraday'sche Induktionsgesetz herleiten:

$$U_{ind}(t) = \oint_{\partial A} \vec{E} \, d\vec{s} = -\dot{\Phi}(t) = -\frac{d}{dt} \int_A \vec{B} \, d\vec{A} \quad (22)$$

Für den Fall einer Leiterschleife mit Windungszahl  $N$ , eingeschlossener Fläche  $A$ , konstanter magnetischer Flussdichte  $B$  und Rotationsfrequenz  $\omega = 2\pi f$  erhält man einen Ausdruck für die in der Schleife induzierte Wechselspannung (mit Phasenverschiebung  $\phi$ ):

$$U_{ind}(t) = -NBA\omega \cos(\omega t + \phi) \quad (23)$$

---

### 3.6 Charakterisierung von Multipolkomponenten

---

Führt man eine Entwicklung in Zylinderkoordinaten durch, so erhält man für Radial- ( $r$ ) und Azimutkomponente ( $\phi$ ):

$$B_r(r, \phi) = \sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{r}{r_{R0}} \right)^{n-1} (-a_n \cos(n\phi) + b_n \sin(n\phi)) \quad (24)$$

$$B_\phi(r, \phi) = \sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{r}{r_{R0}} \right)^{n-1} (a_n \sin(n\phi) + b_n \cos(n\phi)) \quad (25)$$

Hierbei ist  $r_{R0}$  ein sogenannter Referenzbereich, in dem das Magnetfeld durch diese Näherung beschreibbar ist, während die Koeffizienten  $a_n$  bzw.  $b_n$  die schiefwinkligen bzw. normalen Komponenten des jeweiligen Multipols darstellen.

Überträgt man diese Erkenntnis auf eine komplexe Potenzreihe der Form

$$F = \sum_{n=1}^{\infty} C_n z^n \quad (26)$$

so werden die schiefwinkligen Komponenten durch den Imaginärteil und normale Komponenten durch den Realteil der Reihe veranschaulicht. Diese Darstellung erlaubt es nun, durch Betrachtung der Drehinvarianz eines Multipols diesen durch auftretende Summanden in der Potenzreihe zu charakterisieren.

Die Drehinvarianz eines Multipols erhält man etwa durch Aufstellen der Symmetrien beim Messen eines Magnetfeldes mit einer Spule. Gemäß der elektromagnetischen Induktion wird die induzierte Spannung dann betragsmäßig maximal, wenn der Magnetfeldvektor und Flächennormalenvektor (anti-)parallel zueinander ausgerichtet sind.

In Abbildung 14 und Abbildung 15 kennzeichnen rote Punkte den Ort, an dem die Rotationsachse der Spule senkrecht zur Papierebene anliegt. Die Rotationsachse liegt zudem in der Ebene, die von der Spule aufgespannt wird (im Laborsystem liegt die Rotationsachse also in x-Richtung). Die schwarze Ellipse kennzeichnet in dieser Überlegung den Startpunkt einer Rotation. Rote Linien kennzeichnen die Orte, an denen die rotierende, von der Spule aufgespannte Ebene einen betragsmäßigen Maximalausschlag des Induktionsstroms erzeugt.

Wird eine feste Rotationsfrequenz  $f' = \frac{1}{T}$  vorgegeben, so sind zu verschiedenen Zeiten betragsmäßige Maxima des

Induktionsstroms zu finden, was in Folgendem als Ereignis bezeichnet wird.

Um einen Dipol identifizieren zu können, sind folgende in Abbildung 14 eingezeichneten Positionen geeignet:

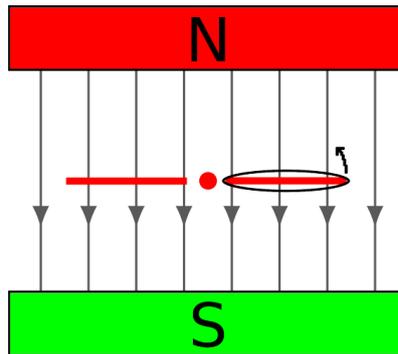


Abbildung 14: Positionen einer rotierenden Spule im Dipol, bei denen maximale Spannung induziert wird. Die Rotationsrichtung wird durch den schwarzen Pfeil vorgegeben. Bei einer Frequenz von  $f'$  liegt ein Ereignis nach  $\frac{T}{2}$  und  $T$  vor. [7, bearbeitet]

Ähnliches für einen Quadrupol:

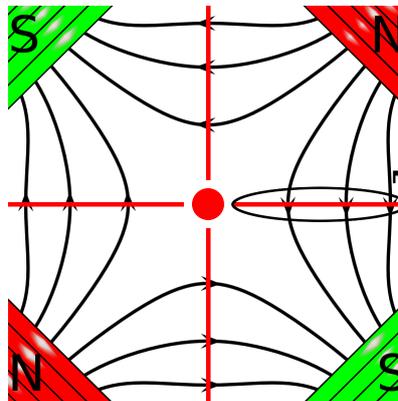


Abbildung 15: Positionen einer rotierenden Spule im Quadrupol, bei denen maximale Spannung induziert wird. Die Rotationsrichtung wird durch den schwarzen Pfeil vorgegeben. Bei einer Frequenz von  $f'$  liegt ein Ereignis nach  $\frac{T}{4}$ ,  $\frac{T}{2}$ ,  $\frac{3T}{4}$  und  $T$  vor. [8, bearbeitet]

Bei gleicher Rotationsfrequenz der Spule misst man also bei einem Umlauf beim Quadrupol doppelt so viele Ereignisse wie beim Dipol.

Mathematisch lässt sich dies ausdrücken, indem man die Symmetrie durch

$$F_n\left(\Theta + \frac{\pi}{N}\right) = -F_n(\Theta) \quad (27)$$

beschreibt. Hierbei sind  $N$  das Multipolmoment und  $\Theta$  der Drehwinkel von Anordnung und festem Bezugspunkt (etwa der Spule). Auswerten dieses Zusammenhangs mittels der Euler'schen Formel für die Variable  $z$  in der Potenzreihenentwicklung liefert allgemein:

$$n_{\text{Multipol}} = N(2m + 1) \text{ mit } m \in \mathbb{N}_0 \quad (28)$$

Vergleicht man Dipol- ( $N=1$ ) und Quadrupolmoment ( $N=2$ ), so ergibt sich:

$$n_{\text{Dipol}} = 2m + 1 = 1, 3, 5, 7, \dots \quad (29)$$

$$n_{\text{Quadrupol}} = 2(2m + 1) = 2, 6, 10, 14, \dots \quad (30)$$

Da die Indizes  $n_{\text{Multipol}}$  in den auftretenden Cosinus- und Sinus-Termen die Rolle einer Frequenz übernehmen, spiegelt dieser Ansatz die vorher bestimmte Verhältnismäßigkeit der Ereignisse bei einem Umlauf richtig wider.

---

### 3.7 Diskrete Fourier Transformation (DFT)

---

Misst man also etwa mit einer Spule die von einem Quadrupol induzierte Wechselspannung, so ist diese zusammengesetzt aus verschiedenen Komponenten der Multipole. Mittels Fouriertransformation kann man dieses Signal nun in seinen Frequenzraum übertragen und durch Betrachtung der Frequenzen die gegebenen Multipolanteile identifizieren.

Ein idealer Quadrupol wird nur Frequenzen aufweisen, die einem Muster gemäß Glg. 29 folgt. Allerdings führen Toleranzen im Aufbau dazu, dass auch andere Komponenten zu finden sein werden.

In diesem Versuch können nur zeitdiskrete Signale gemessen werden, weshalb das Integral der Fouriertransformation durch eine Summe über die  $N$  Abtastwerte  $x(n)$  ersetzt wird. Mathematisch wird dies beschrieben durch:

$$x[k] = \sum_{n=0}^{N-1} x(n) e^{-ikn\frac{2\pi}{N}}, \quad k = 0, 1, 2, \dots, N-1 \quad (31)$$

Hierbei ist  $k$  das Raster des Frequenzraums, welches die dort vorliegenden Frequenzen mit

$$k\frac{f_s}{N} \quad (32)$$

wobei  $f_s$  die Abtastfrequenz ist, vorgibt.

---

## 4 Versuchsdurchführung

---

Im Zentrum der Messungen dieses Versuchs steht eine CNC-Flachbetteinheit, an der eine Hall-Sonde befestigt ist. Start- und Endpunkt einer Messung, manuelle Bedienung und Kalibrierung der CNC-Einheit geschieht über den PC beim Versuchsaufbau vor Ort.

Jegliche Richtungsangaben des Quadrupols beziehen sich auf das in Kapitel 3.4.2 eingeführte Koordinatensystem: Die x-Richtung verläuft parallel zu den runden Flächen der Polschuhe, die y-Richtung verläuft parallel zur Ebene, auf der der Quadrupol positioniert ist. Die z-Richtung verläuft senkrecht zur Ebene, auf der der Quadrupol positioniert ist.

Jegliche Richtungsangaben des Steuerers ergeben sich folgendermaßen: Die x-Richtung verläuft parallel zu den längsten Kanten des Steuerers. Die y-Richtung verläuft parallel zu den Kanten, um die keine Spulen gewickelt sind. Die z-Richtung verläuft parallel zu den Kanten, um die Spulen gewickelt sind.

---

### 4.1 Quadrupol

---

#### 4.1.1 Ausrichtung/Messvorbereitung

---

Bevor die erste Messung zum Quadrupol gestartet werden kann, muss die Ausrichtung des Magneten zur CNC-Einheit geprüft und ggf. korrigiert werden. Dazu führt die Hall-Sonde entlang einer Gerade parallel zur x-Achse eine Messung des Gradientenprofils im Quadrupol durch. Dazu werden jeweils ein Punkt vor und hinter dem Quadrupol gewählt, bei denen die magnetische Flussdichte einen Wert von  $\approx 0,3mT$  aufweist, was dem Fluss entspricht, der an Positionen in großer Entfernung vom Wirkungsbereich des Quadrupols vermessen wurde. Die Schrittzahl zwischen den beiden Punkten wurde auf 40 Punkte festgesetzt.

Anhand der Form der gemessenen Kurve lässt sich darauf rückschließen, ob die Ausrichtung des Magneten korrekt ist. Sollte dies nicht der Fall sein, so würde sich dies durch einen nicht parallel zur x-Achse verlaufenden Plateau-Bereich bzw. durch Fehlen eines Plateau-Bereiches an sich bemerkbar machen. Nach einem Durchlauf wurde folgendes Profil vermessen:

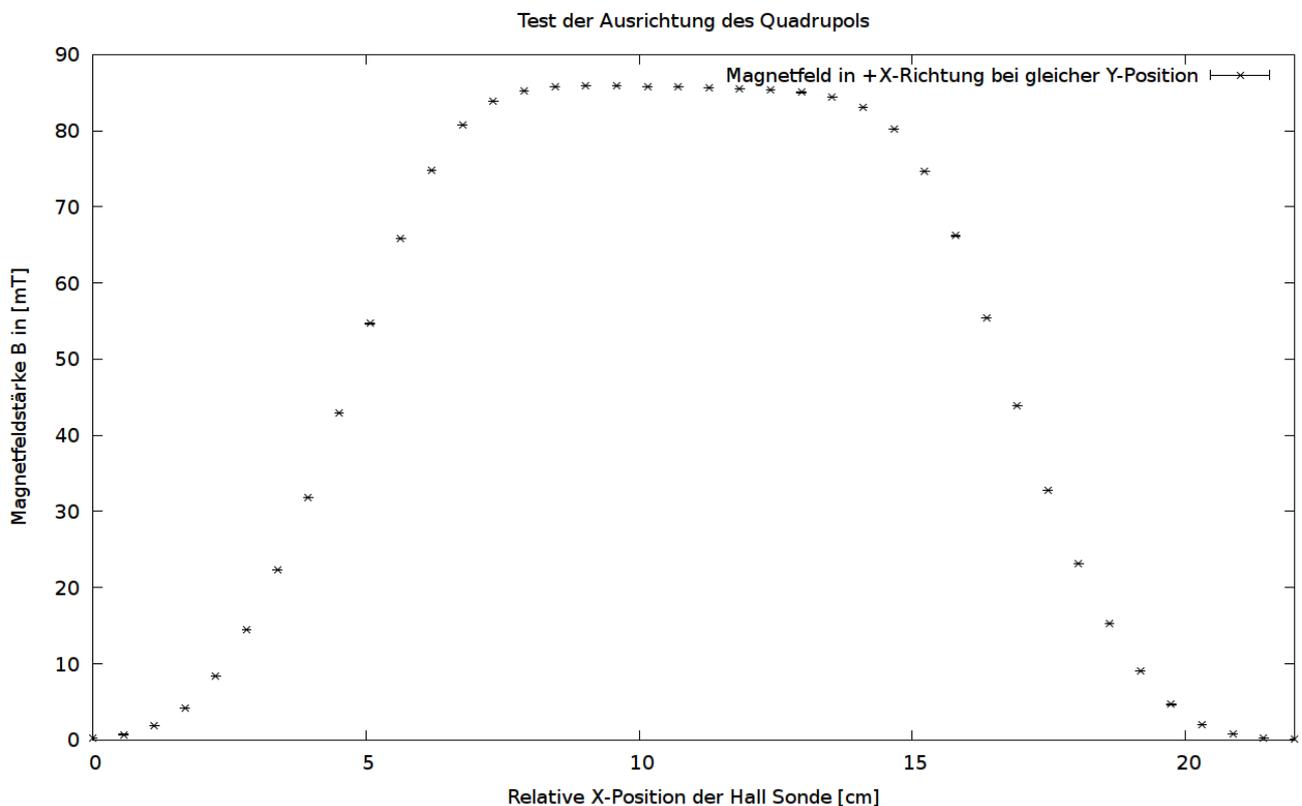


Abbildung 16: Magnetfeldprofil zur Überprüfung der Ausrichtung des Quadrupolmagneten

Das Profil weist einen deutlich erkennbaren, zur x-Achse parallelen Plateaubereich auf, von einer ausreichenden Ausrichtung des Quadrupols kann ausgegangen werden.

---

---

## 4.1.2 Messung der Gradientenprofile

---

Anschließend wird dieselbe Messung über eine Ebene in der x-y-Ebene ausgeführt. Dafür werden wieder Punkte gemäß der vorherigen Teilaufgabe vor und hinter dem Quadrupol bestimmt, sodass sich aber diesmal eine Ebene aufspannt, entlang derer das Gradientenprofil bestimmt wird. Der Strom wird beginnend mit 10A in 2A-Schritten auf 0A reduziert. Die Schrittweite in x-Richtung beträgt dabei 40 Schritte und in y-Richtung 8 Schritte (nur bei der ersten Messung mit 10A wurde mit 50 in x-Richtung und 10 Schritten in y-Richtung gemessen, was aber aus Zeitgründen für die folgenden Messungen entsprechend reduziert wird).

---

## 4.2 Auswertung zum Quadrupol

---

### 4.2.1 Remanenzgradientenprofile

---

Das Remanenzgradientenprofil ergibt sich aus der Messung des Magnetfelds bei einem Spulenstrom von 0A und weist folgende Form auf:

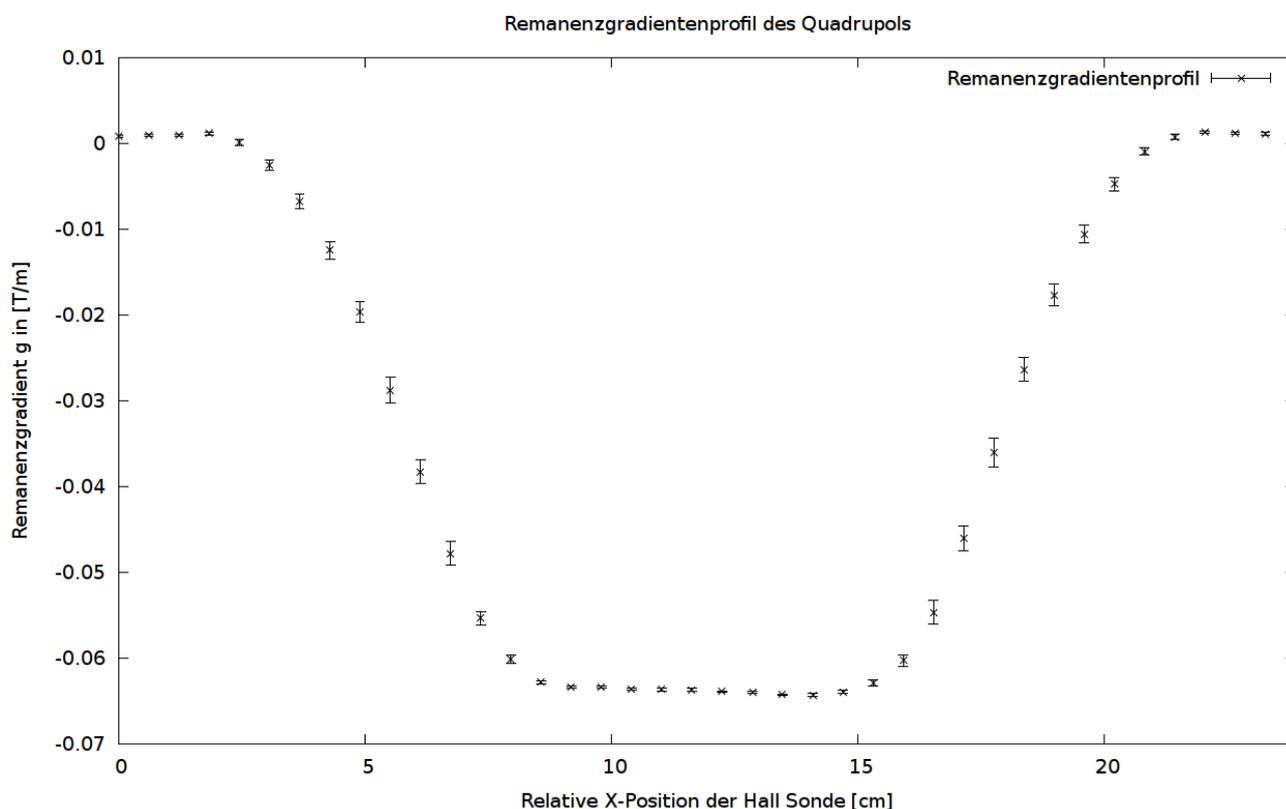


Abbildung 17: Remanenzgradientenprofil

In diesem Fall hat es keinen Einfluss auf die anderen Messungen, da es als letztes aufgenommen wurde. Dies ist aber beabsichtigt, um die Entstehungsgeschichte dieses Profils nachvollziehen zu können.

Theoretisch beeinflusst die Remanenz den gemessenen Gradienten. Um sich dies klar zu machen, sei an Abbildung 2 erinnert, in der verschiedene Hystereseverläufe eingezeichnet sind. Gesetzt den Fall, es sei die positive Remanenz des grünen Verlaufs bei 0A gemessen worden. Wird nun ein Strom  $I_{grün}$  angelegt, der zum rechten Maximum des grünen Verlaufs führt, und von dort aus die Messung des Gradienten bei verschiedenen Strömen durchgeführt, so würden sich andere Gradienten ergeben, als wenn an die positive Remanenz des grünen Verlaufs ein Strom  $I_{orange}$  angelegt worden wäre, der zum rechten Maximum des orangenen Verlaufs führt, da für die beiden Verläufe verschiedene Magnetfeldstärken vorliegen. Sinnvoll angeben lässt sich ein Gradient also nur in Bezug auf das äußere angelegte Magnetfeld. Am besten auf dasjenige Magnetfeld, das den Sättigungsbereich kennzeichnet, da für dieses immer derselbe Verlauf erwartet wird.

Für die gemessene Remanenz lassen sich Gradienten aus dem homogenen und Randfeldbereich veranschaulichen.

Dazu werden Geraden jeweils mit einer Steigung, die aus dem Gradientenprofil entnommen wird, in den 3D-Plot der z-Komponente des Magnetfelds eingetragen:

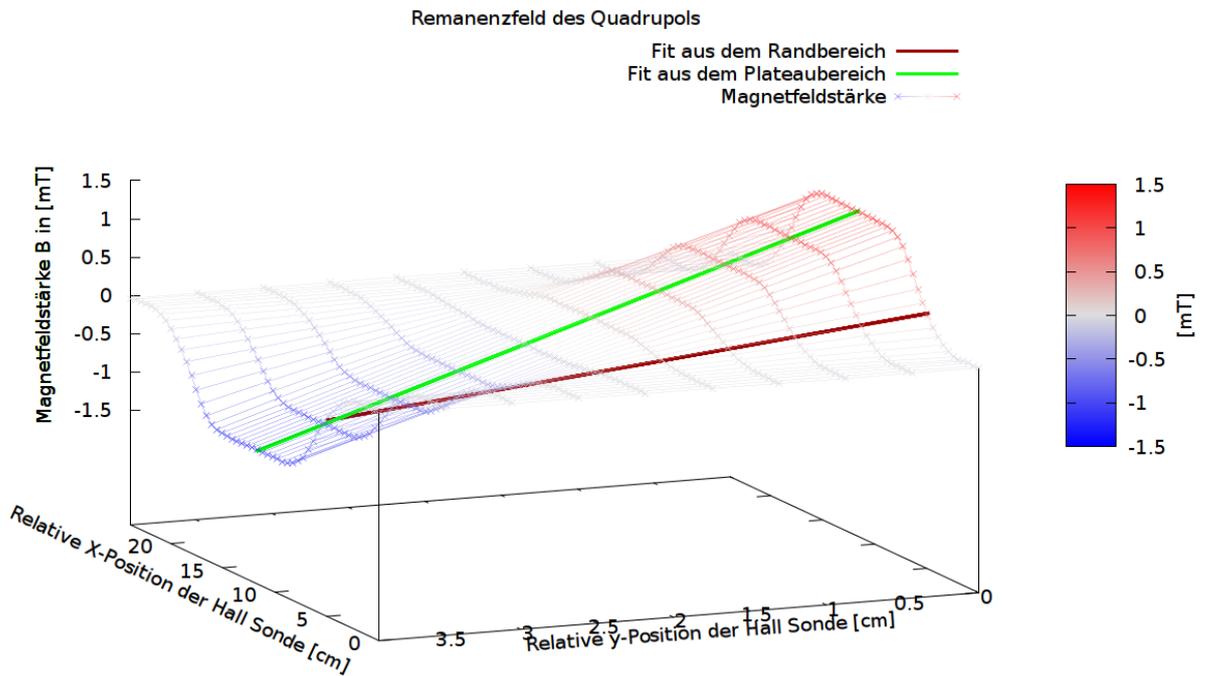


Abbildung 18: Gradienten aus homogenem und Randfeldbereich

Eine 2D-Auftragung liefert:

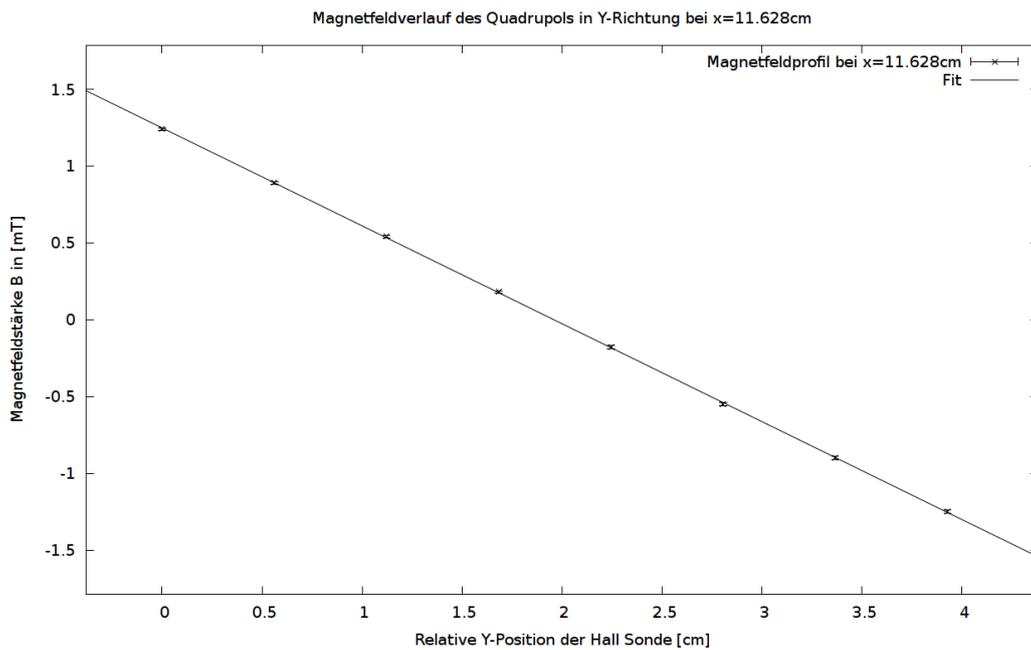


Abbildung 19: Auftragung des Remanenzgradienten im homogenen Bereich bei  $x = 4,896\text{cm}$

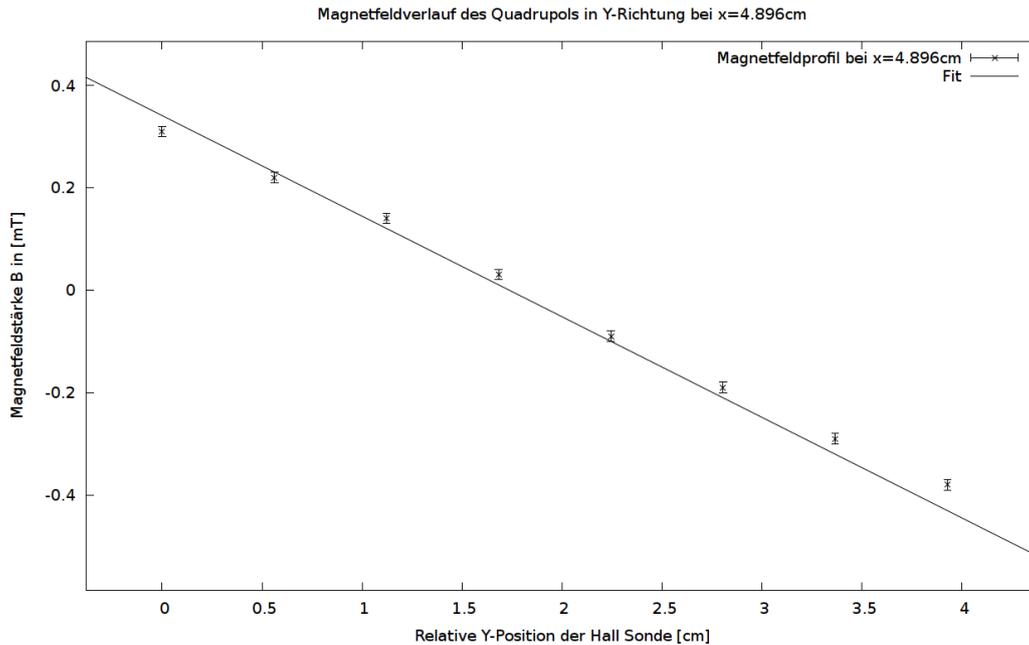


Abbildung 20: Auftragung des Remanenzgradienten im Randbereich bei  $x = 11,628\text{cm}$

Die Funktionsgleichungen der Geraden lauten:

$$B_{\text{Randfeld}}(y) = (-2 \cdot 10^{-2} \pm 10^{-3}) \frac{T}{m} y + (34 \cdot 10^{-5} \pm 3 \cdot 10^{-5}) T \text{ bei } x = 4,896\text{cm} \quad (33)$$

$$B_{\text{homogen}}(y) = (-6,37 \cdot 10^{-2} \pm 2 \cdot 10^{-4}) \frac{T}{m} y + (1,248 \cdot 10^{-3} \pm 3 \cdot 10^{-6}) T \text{ bei } x = 11,628\text{cm} \quad (34)$$

Auffällig ist, dass die Unsicherheiten der Randfeldgeraden größer ausfallen, als im homogenen Bereich. Dies ist zu erwarten, da der Randfeldbereich nicht nur vom Quadrupol beeinflusst wird. Wie in Kapitel 4.1.1 erwähnt, konnte auch bei großen Abständen ein Magnetfeld festgestellt werden. Dieses könnte vom Erdmagnetfeld, Störquellen wie elektronische/ metallische Geräte oder durch die nicht ganz optimale Abschirmung des Quadrupols und dadurch entstehende inhomogene Felder außerhalb des Magneten verursacht sein.

Man sieht dennoch, dass sich im homogenen Bereich die Gerade sehr gut an das Magnetfeld anpasst, was den linearen Zusammenhang aus Glg. 16 bestätigt. Im Randfeldbereich besitzt die Gerade eine geringere Steigung, was einen geringeren Gradienten bedeutet. Da das Magnetfeld schwächer wird, je weiter man sich vom Quadrupol entfernt, ist dies ein zu erwartendes Ergebnis.

---

## 4.2.2 Restliche Gradientenprofile und magnetische Länge

---

Für die anderen Ströme wurden auch die Gradientenprofile vermessen:

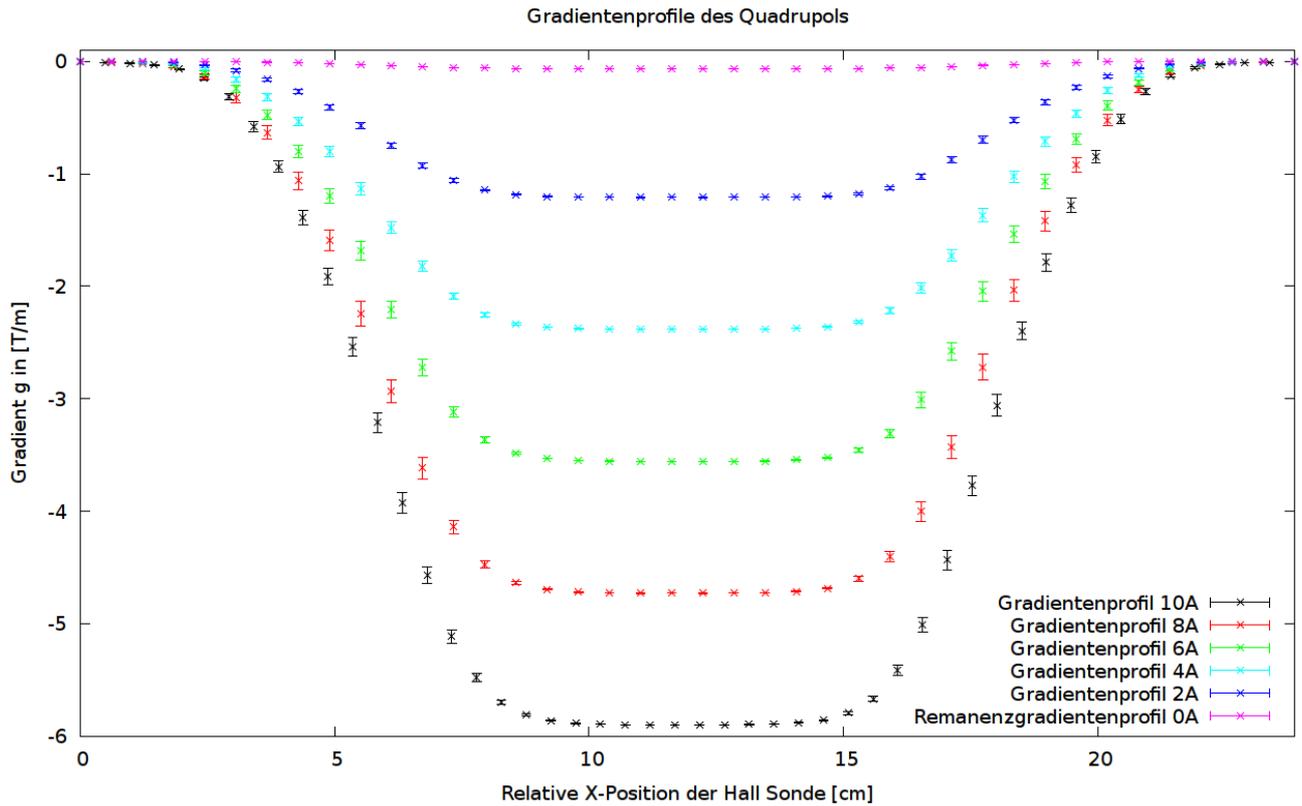


Abbildung 21: Gradientenprofile bei verschiedenen Spulenströmen

Alle besitzen einen Plateaubereich und gemäß Glg. 17 steigt der Wert eines Gradienten mit dem angelegten Spulenstrom, was sich in der Auftragung wiederfindet.

Um daraus die magnetische Länge zu bestimmen, wird die magnetische Länge gemäß Glg. 19 bestimmt. Dabei gilt:

$$L_{eff} = \frac{1}{B_{max}} \int_{-\infty}^{\infty} B(x) dx \quad (35)$$

$$= \frac{1}{g_{max} y} \int_{-\infty}^{\infty} g(x) y dx \quad (36)$$

$$= \frac{1}{g_{max}} \int_{-\infty}^{\infty} g(x) dx \quad (37)$$

Mittels Trapezformel erhält man für die magnetischen Längen bei verschiedenen Spulenströmen:

Spulenstrom in [A]	$L_{eff}$ in [cm]
10	12,618
8	12,616
6	12,615
4	12,613
2	12,608
0	12,229

Der Mittelwert beträgt für alle Werte  $\bar{L}_{eff,1} = (12,55 \pm 0,144)cm$ . Ohne den Wert des Spulenstroms von 0A erhält man für den Mittelwert  $\bar{L}_{eff,2} = (12,614 \pm 0,003)cm$ .

Die Abweichung der Werte voneinander beträgt hierbei  $\frac{\bar{L}_{eff,1}}{\bar{L}_{eff,2}} \approx 5,1 \cdot 10^{-3}$ . Die Werte liegen also sehr nahe beieinander, für den Vergleich mit der tatsächlichen Länge des Quadrupols wird aber  $\bar{L}_{eff,2}$  genutzt, da die Werte für diesen

Mittelwert in einem engeren Bereich liegen. Zudem ist es durchaus vorstellbar, dass bei Abstellen eines äußeren Magnetfelds zu einem gewissen Grad Effekte im Material stärker zur Geltung kommen, die für den niedrigeren Wert bei 0A gesorgt haben können.

Die Länge des Quadrupols (also eine Polschuhlänge) wurde zu  $L_{real} = 12cm$  bestimmt. Erwartungsgemäß sollte die magnetische Länge größer ausfallen als die reale Länge, da die Wirkung des Quadrupols nicht mit dem Ende des Polschuhs abrupt abbricht, sondern noch ein wenig weiter reicht, bis seine Wirkung zu vernachlässigen ist. Dieses zusätzliche Wegstück macht sich in den zusätzlichen  $\bar{L}_{eff,2} - L_{real} = 0,614cm$  bemerkbar.

---

### 4.2.3 Strom-Gradienten-Kalibrierung

---

Bei einer Strom-Gradienten-Kalibrierung wird der gemessene Gradient auf den zugehörigen Spulenstrom aufgetragen. Dabei erhält man:

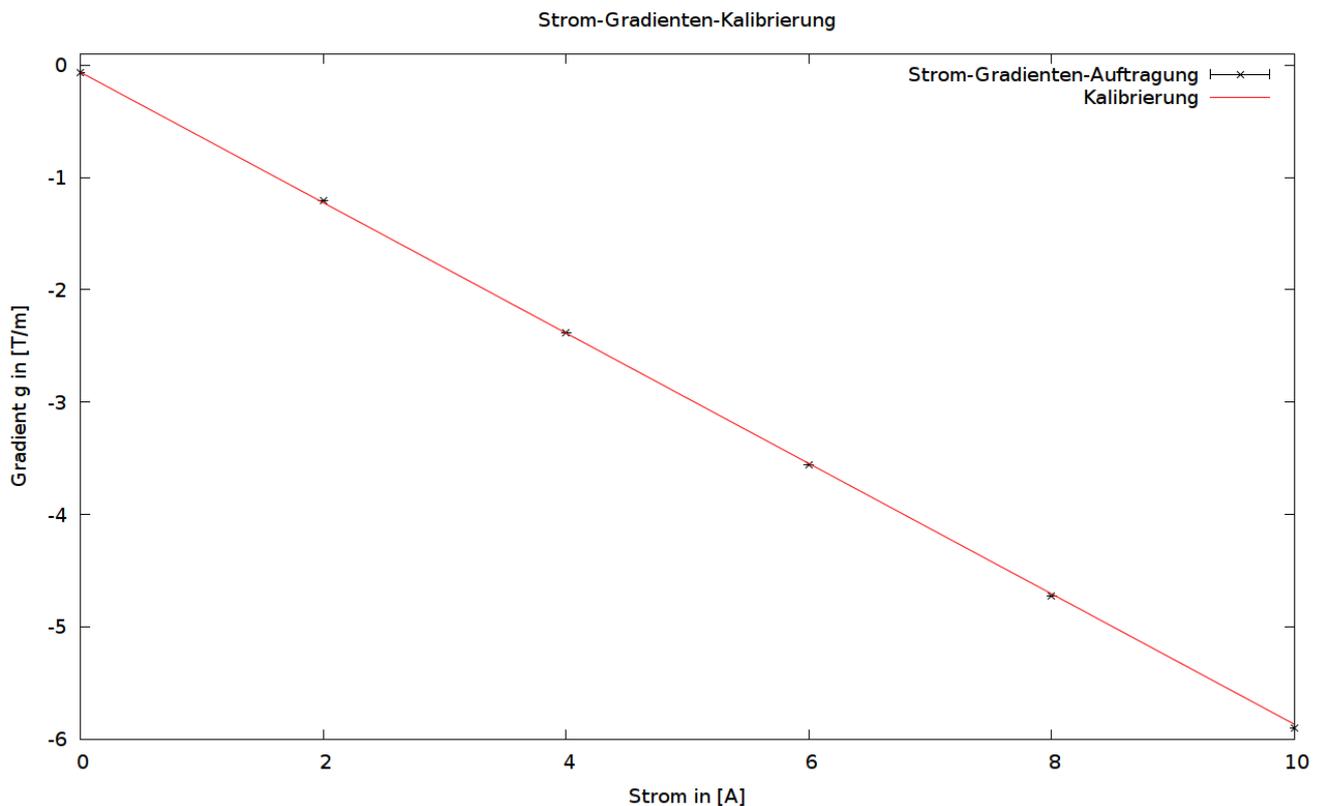


Abbildung 22: Auftragung Gradient auf Spulenstrom

Die Geradengleichung wurde zu  $g(I) = (-5,81 \pm 0,02) \frac{mT}{cm A} I + (-0,62 \pm 0,03) \frac{mT}{cm}$  bestimmt. Es ist ein kleiner Offset festzustellen, der den Gradienten der Remanenz darstellt. Für Glg. 17 wurden einige Vereinfachungen getroffen und Effekte wie Remanenz nicht berücksichtigt. Vernachlässigt man unter diesen Umständen den kleinen Offset, so lässt sich der proportionale Zusammenhang von Gradient und Spulenstrom erkennen.

---

## 4.3 Steerer

---

### 4.3.1 Ausrichtung/Messvorbereitung

---

Vor der Messung zum Steerer muss zunächst sicher gestellt werden, dass er richtig zur CNC-Einheit ausgerichtet ist. Dazu wurde die Hall-Sonde durch das Vierkantrohr bewegt und per Augenmaß die Ausrichtung der Halterung zum Rohr auf eine möglichst parallele Position hin geprüft.

### 4.3.2 Vermessung des Magnetfelds

---

Auch hier wird wie beim Quadrupol vorgegangen: Die Hall-Sonde wird vor und hinter dem Rohr so platziert, dass eine Flussdichte von  $\approx 0,3mT$  registriert wird und eine Ebene von 40 Punkten in x-Richtung und 8 Punkten in

y-Richtung abgefahren, während ein Spulenstrom von 5A angelegt wurde.

Anschließend wird die Hall-Sonde an einer festen Position im homogenen Bereich (der auch hier mit Augenmaß abgeschätzt wird) bei Spulenströmen von 5A bis 0A in 1A-Schritten die magnetische Flussdichte vermessen.

#### 4.4 Auswertung zum Steerer

##### 4.4.1 Bestimmung des feldglatten Bereichs

Die Messung der z-Komponente des Magnetfelds kann auf der Messebene in der x-y-Ebene aufgetragen werden:

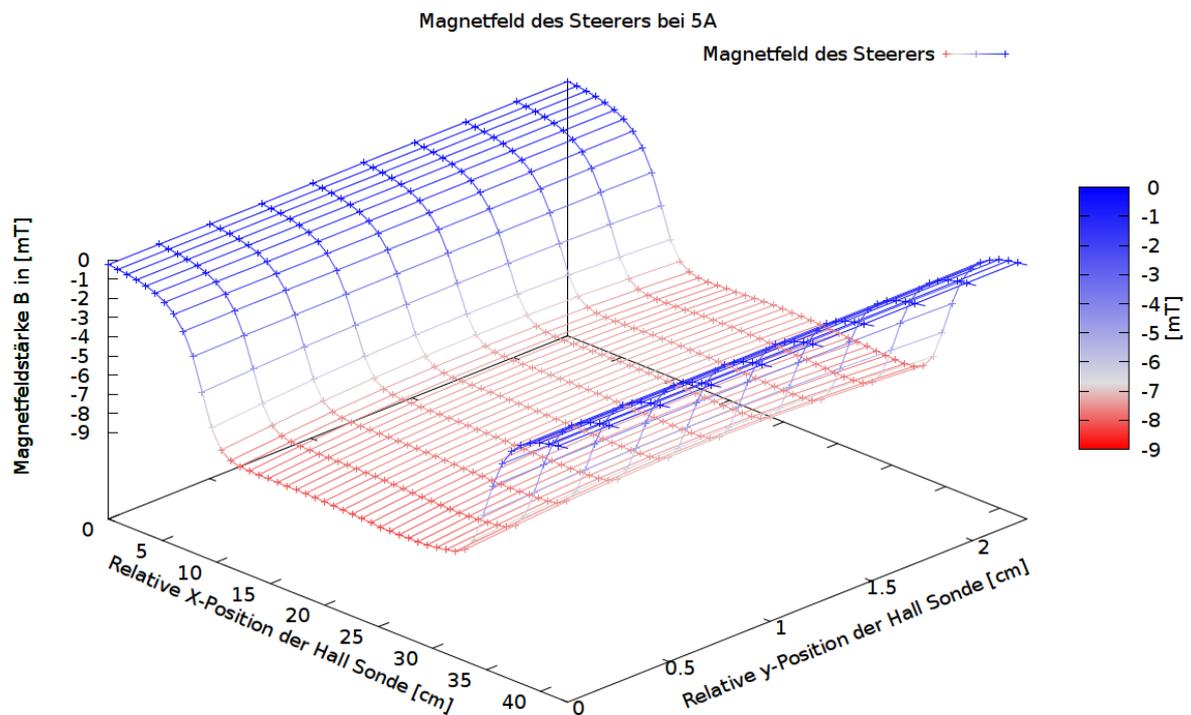


Abbildung 23: z-Komponente des Magnetfelds im Steerer

Zur Bestimmung des feldglatten Bereichs wurde zunächst grob aus der Grafik abgelesen, welcher Bereich dafür infrage kommt. Danach wurden die Grenzen des Bereichs so lange variiert, bis die Abweichung der Werte in diesem Bereich von ihrem Mittelwert etwas weniger als 2% beträgt. Dieser Wert wurde im Hinblick darauf bestimmt, dass große Genauigkeiten für einen Beschleunigerbetrieb nötig sind. In der Praxis wären 2% Abweichung zwar immer noch zu groß, allerdings wäre die Angabe eines Bereiches für noch kleinere Abweichungen nicht mehr sinnvoll, da zu wenige Werte in die Mittelwertbestimmung einfließen würden.

Der bestimmte Bereich beinhaltet 120 Werte und weist eine Dimensionierung von 22cm in x-Richtung und 2cm in y-Richtung auf. Die Größe der Fläche beträgt also  $A_{feldglatt} = 44cm^2$ . Der Wert der magnetischen Flussdichte in diesem Bereich wurde zu  $B_{feldglatt} = (-7,53 \pm 0,14)mT$  bestimmt. Der Bereich ist in folgender Abbildung veranschaulicht:

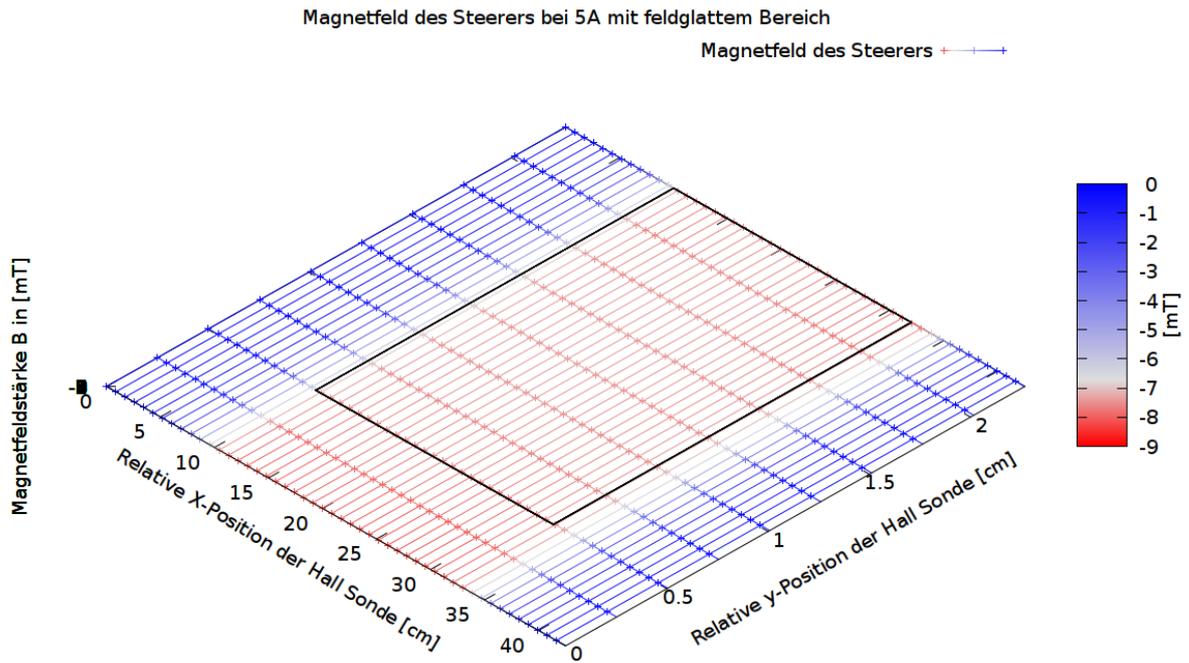


Abbildung 24: Feldglatter Bereich des Steuerers

---

#### 4.4.2 Bestimmung der Windungszahl

---

Nun kann die Windungszahl des Steuerers bestimmt werden. Die magnetische Flussdichte im homogenen Bereich, der angelegte Spulenstrom und die magnetische Feldkonstante sind bekannt. Weiterhin wurde der Abstand zweier kurzen Kanten des quadratischen Vierkantrohres zu  $L_{Rohr} = (5 \pm 0,2)cm$  bestimmt. Stellt man Gl. 15 nach  $N$  um und berechnet die Ungenauigkeit nach Gauß, so erhält man für die Gesamtwindungszahl des Steuerers  $N = (60 \pm 3)$ . Zählt man die Anzahl an Windungen in Abbildung 5 per Hand, so erhält man als Vergleichswert  $n_{real} = 55$ , wenn man berücksichtigt, dass die an den roten und blauen Anschlüssen befindlichen Spulenteile auch einen Anteil von jeweils einer halben Spule liefern. Der reale Wert liegt somit nicht im Ungenauigkeitsbereich von  $N$ , was aber am ehesten auf die unter Vereinfachungen hergeleitete Gl. 15 und die nicht optimale Wicklung der Spulen bzw. Anfertigung des Steuerers selbst (denn dieser besteht aus zwei miteinander verbundenen U-Rohren) zurückzuführen ist.

---

#### 4.4.3 Magnetfeld-Strom-Kalibrierung

---

Im abgeschätzten feldglatten Bereich ergibt sich folgende Auftragung:

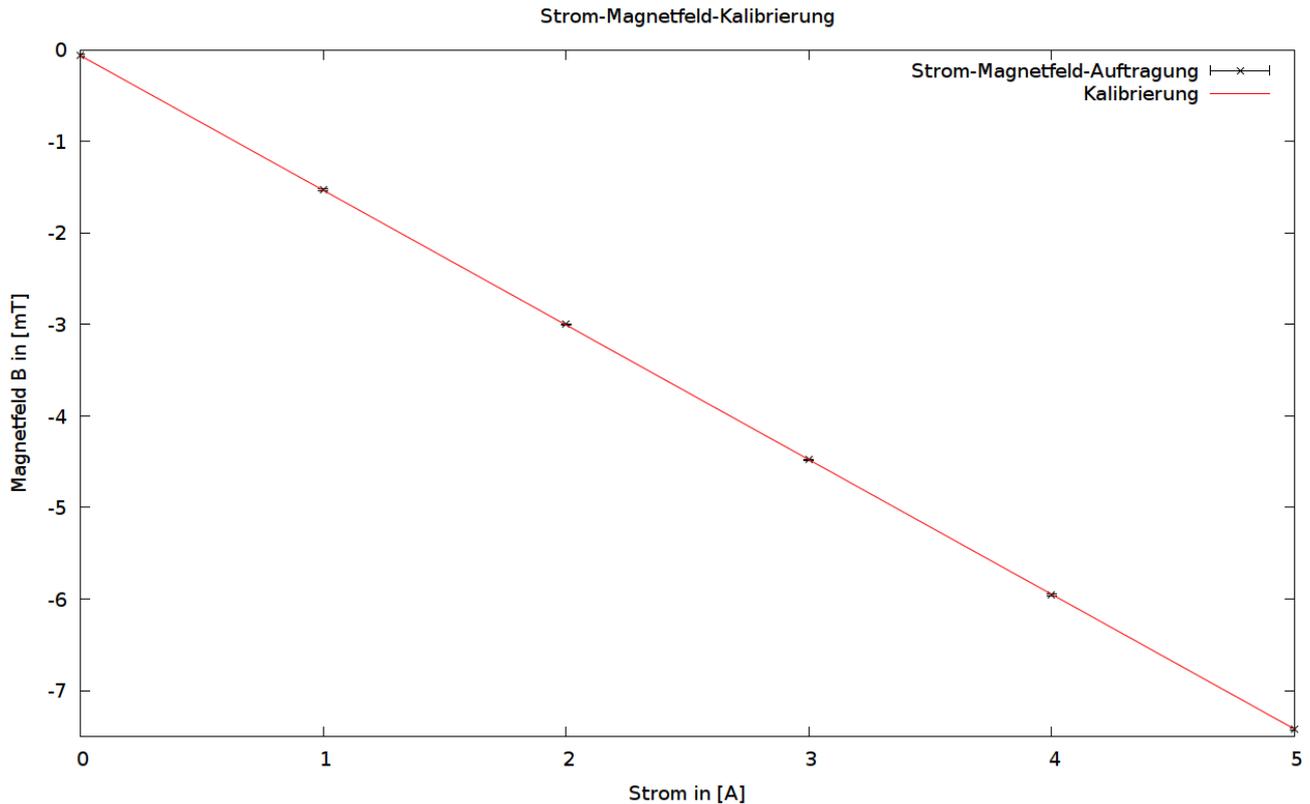


Abbildung 25: Auftragung Magnetfeldstärke auf Spulenstrom

Die Geradengleichung wurde zu  $B(I) = (-1,4726 \pm 0,0007) \frac{mT}{A} I + (-0,059 \pm 0,002) mT$  bestimmt. Wie auch schon bei der anderen Kalibrierung liegt ein Offset vor, der von der Remanenz verursacht wird. Ignoriert man diese, so wird auch hier der in Glg. 15 vorhergesagt proportionale Zusammenhang zwischen magnetischer Flussdichte und angelegtem Spulenstrom klar.

---

## 4.5 Multipolkomponenten

---



---

### 4.5.1 Ausrichtung/Messung

---

Es soll nun mithilfe der rotierenden Spule die Multipolkomponenten des Quadrupols bestimmt werden. Hierbei wird der Effekt der Induktion genutzt, um die zeitlich variierende Spannung zu vermessen. Die Spule wird im homogenen Bereich des Quadrupols platziert und die Drehachse möglichst parallel zur Symmetrieachse des Quadrupols ausgerichtet. Außerdem muss darauf geachtet werden, dass die Drehachse der Spule sich im Zentrum des Quadrupols befindet, um Randeffekte zu vermeiden.

Die Spannung wird hierbei mit einem Oszilloskop über einem Zeitraum von 10s vermessen. Die Messdauer wird möglichst groß eingestellt, da die Auflösung des transformierten Signals antiproportional zur Messdauer und Anzahl der Messpunkte ist. Es werden daher  $N = 2500$  Messpunkte aufgenommen. Der Spannungsverlauf ist im Folgenden einzusehen:

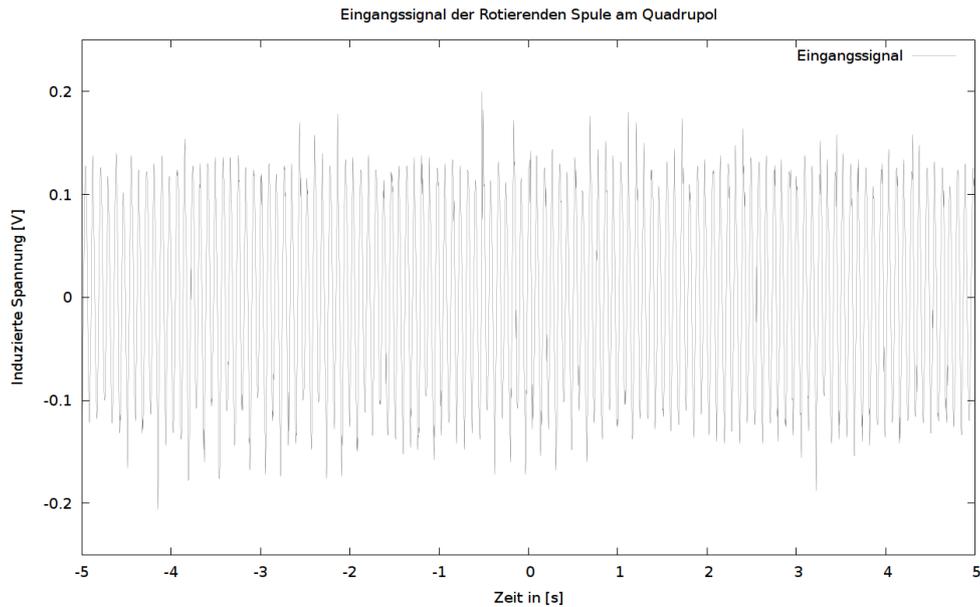


Abbildung 26: Eingangssignal der Induktionsspannung von der rotierenden Spule

Es lassen sich schon einige Oberschwingungen im Signal erkennen. Die Frequenzanteile und jeweilige Amplitude werden mittels DFT dargestellt.

---

## 4.6 Auswertung zur Messung mit einer rotierenden Spule

---

### 4.6.1 Bestimmung der Multipolanteile des Quadrupols

---

Die gemessenen Daten werden fouriertransformiert, wobei die kleinste beitragende Frequenz die der Dipolkomponente ist. Diese beträgt  $f_{Dipol} \approx 5,8\text{Hz}$  welche genutzt wird, um die x-Achse mit diesem Wert zu normieren, da die höheren Multipolfrequenzen Vielfache vom Dipol sind. Ebenso wurde die y-Achse zum höchsten Peak, welcher durch den Quadrupols gegeben ist, normiert. Der Anteil beträgt hierbei  $\approx 0,1\text{V}$ . Der somit entstandene Plot ist in Abbildung 27 einzusehen:

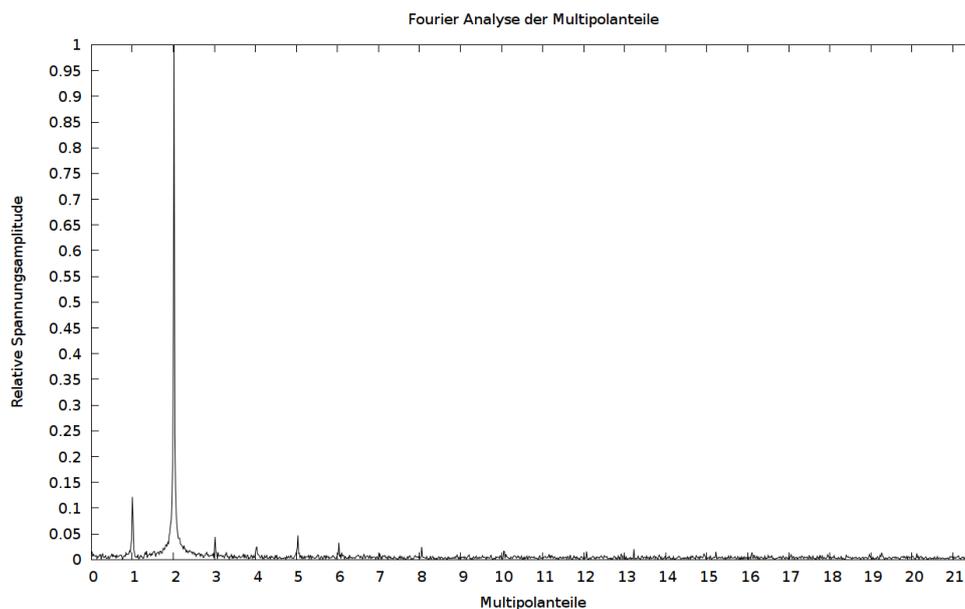


Abbildung 27: Fouriertransformiertes Eingangssignal des Quadrupols mit Skalierung

Es lässt sich feststellen, dass den größten Signalbeitrag die Dipol- und Quadrupolkomponente haben. Auch einige kleinere Beiträge sind festzustellen.

Da für den Beschleunigerbetrieb hohe Genauigkeiten von den strahlfokussierenden Magneten gefordert sind, werden für die weitere Betrachtung nur Werte betrachtet, deren relative Signalstärke mehr als 1% beträgt. Diese sind im Folgenden dargestellt:

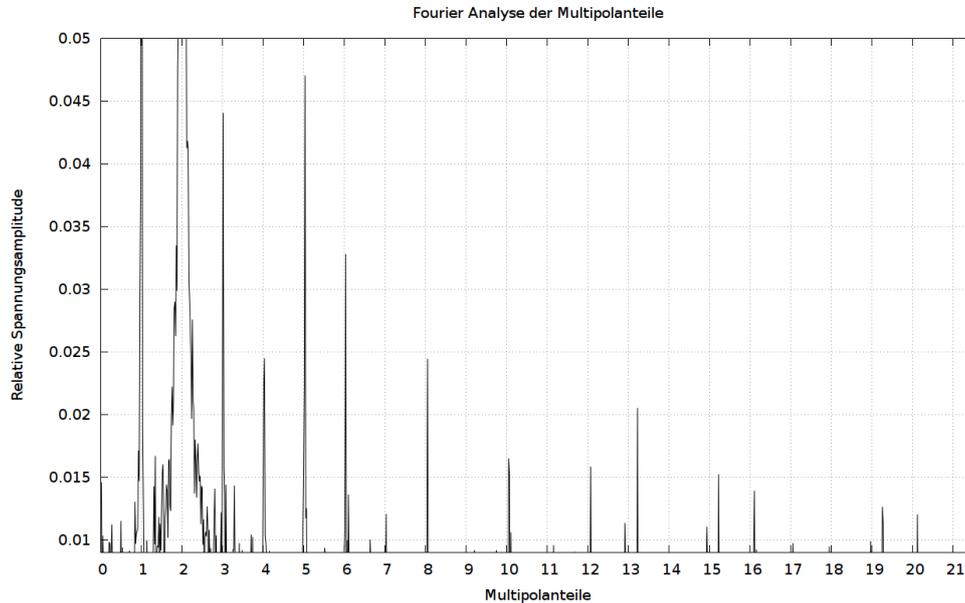


Abbildung 28: Fouriertransformiertes Eingangssignal des Quadrupols mit relativer Signalstärke  $> 1\%$

Ein Multipol besitzt aufgrund seiner Geometrie immer auch Anteile höherer Ordnung. Diese lassen sich gemäß Glg. 26 bestimmen. Folgende Tabelle zeigt auf, welche Anteile gemessen wurden und welchem Multipol diese zuzuordnen sind:

Anteil	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Festgestellt	X	X	X	X	X	X	X	X		X
Dipol	X		X		X		X		X	
Quadrupol		X				X				X
Octupol				X						

Tabelle 1: Gemessene und nach Multipol erwartete Komponenten

Es lässt sich erkennen, dass die erwarteten Dipol und Quadrupolanteile vorliegen und diese die meisten weiteren Anteile erklären können. Die unerwarteten Anteile lassen sich durch ungenaue Ausrichtung, zu geringe Messdauer und Anfertigungstoleranzen erklären.

## 5 Fazit

In diesem Versuch wurden ein Dipol- und Quadrupolmagnet auf ihr Magnetfeld und dessen Eigenschaften hin untersucht.

Beginnend mit dem Quadrupol wurde dessen Gradient eingehend untersucht. Er wurde bei verschiedenen Spulenströmen bestimmt und folgt einer vorhergesagten Proportionalität zum Spulenstrom. Abweichungen sind vor allem auf den Effekt der Remanenz zurückzuführen. In dieser Durchführung ist durch die Reihenfolge der Messungen nicht ersichtlich geworden, dass Remanenz einen Einfluss hat, allerdings konnte diese durch Überlegungen zu den vorliegenden Ergebnissen nachvollzogen werden.

Die Bestimmung des Gradienten erlaubte eine Bestimmung der magnetischen Länge des Quadrupolmagneten, die etwas größer ausfällt, als seine tatsächliche Länge.

Anschließend wurde das Magnetfeld eines Dipolmagneten oder auch Steerers untersucht. Durch Festlegen einer geeigneten Ungenauigkeitsgrenze konnte ein feldglatter Bereich des Dipolmagneten ausgemacht und daraus die

---

Windungszahl der Spulen, die das Feld des Dipols erzeugen, ermittelt werden. Berechneter und tatsächlicher Wert liegen nicht innerhalb der bestimmten Ungenauigkeiten, was aber durch Vereinfachungen und Anfertigung des Steuerers zu erklären ist.

Dennoch lässt der Aufbau eine Proportionalität zwischen magnetischer Flussdichte und Spulenstrom erkennen. Zuletzt sollte der Quadrupol auf seine Multipolkomponenten untersucht werden. Mittels diskreter Fouriertransformation einer Wechselspannung, die durch den Quadrupol in einer rotierenden Spule induziert wurde, konnten vor allem Di- und Quadrupolanteile im vorliegenden Magneten nachgewiesen werden. Weitere Anteile sind zwar vorhanden, machen aber nur einen geringen Anteil aus und können mitunter auch den bereits erwähnten Anteilen zugeordnet werden, da diese ähnliche Symmetrien aufweisen.

---

## 6 Quellenverzeichnis

---

- [1][http://ruby.chemie.uni-freiburg.de/Vorlesung/SVG/FK\\_chemie/hysterese\\_ep.svg](http://ruby.chemie.uni-freiburg.de/Vorlesung/SVG/FK_chemie/hysterese_ep.svg), Stand: 14.01.17, 17:40 Uhr
- [2][https://de.wikipedia.org/wiki/Koerzitivfeldst%C3%A4rke#/media/File:B-H\\_loop.png](https://de.wikipedia.org/wiki/Koerzitivfeldst%C3%A4rke#/media/File:B-H_loop.png), Stand: 14.01.17, 17:40 Uhr
- [3][http://www.spektrum.de/lexika/images/physik/fff4627\\_w.jpg](http://www.spektrum.de/lexika/images/physik/fff4627_w.jpg), Stand: 14.01.17, 17:40 Uhr
- [4]<https://thumbs.dreamstime.com/z/magnetfeld-einer-gegenw%C3%A4rtig-tragenden-spule-76405239.jpg>, Stand: 14.01.17, 17:40 Uhr
- [5][http://www.ikp.tu-darmstadt.de/media/ikp/lehre\\_ikp/fpraktikum\\_anleitungen/vers11.pdf](http://www.ikp.tu-darmstadt.de/media/ikp/lehre_ikp/fpraktikum_anleitungen/vers11.pdf), Stand: 14.01.17, 17:40 Uhr
- [6]<https://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/thumb/b/bb/Sehnentrapezformel.svg/250px-Sehnentrapezformel.svg.png>, Stand: 14.01.17, 17:40 Uhr
- [7]entnommen aus: <http://farhek.com/jd/1135r6e/view-answers/ff6653/>, Stand: 14.01.17, 17:40 Uhr
- [8][https://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/thumb/7/7b/VFPt\\_quadrupole\\_coils\\_1.svg/2000px-VFPt\\_quadrupole\\_coils\\_1.svg.png](https://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/thumb/7/7b/VFPt_quadrupole_coils_1.svg/2000px-VFPt_quadrupole_coils_1.svg.png), Stand: 14.01.17, 17:40 Uhr
- [9]Tipler Physik, Paul A. Tipler, Spektrum, 1. Auflage, 2000, ISBN: 3-86025-122-8
- [10]<https://www.supermagnete.de/magnetismus/diamagnetismus>, Stand: 14.01.17, 17:40 Uhr