4.2: Test einer Bell'schen Ungleichung

| Maximilian Rudolf Lubba Matrikel-Nr.: | Benjamin Wolfgang Kosmala Matrikel-Nr.: |
|---|--|
| Betreuer: Daniel Kiefer Versuch durchgeführt am: 4. Juni 2018 Abgabedatum: 9. August 2018 | |
| | |
| | TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT |
| | and the second |
| | Physikalisches Praktikum für Fortgeschrittene Abteilung A |
| | |
| | |
| | |
| | |
| | |
| | |
| Hilfe Dritter nur mit den angegebenen Qu | otokoll für das Physikalische Praktikum für Fortgeschrittene ohne tellen und Hilfsmitteln angefertigt zu haben. Alle Stellen, die aus die kenntlich gemacht. Diese Arbeit hat in gleicher oder ähnlicher egen. |
| Darmstadt, den 9. August 2018, | Maximilian Rudolf Lubba Benjamin Wolfgang Kosmala |

In halts verzeichn is

| 1 | Einleitung | 2 |
|---|---|----------------------------|
| 2 | Versuchsziel | 2 |
| 3 | Theoretische Grundlagen 3.1 Verschränkte Zustände eines quantenmechanischen Systems 3.2 Historisches | 3 4 5 6 6 7 |
| 4 | Versuchsdurchführung und Auswertung 4.1 Versuchsaufbau 4.2 Strom-Leistungs-Kennlinie 4.3 Bellzustand 4.4 Polarisationskorrelation 4.5 Bellwert 4.6 Michelson-Kontrast | 10 11 12 13 |
| 5 | Fazit | 14 |
| 6 | Quellen | 14 |

1 Einleitung

Zu Beginn des 19. Jahrhunderts gelangen die Formulierungen zweier mittlerweile grundlegenden Theorien: Der Relativitätstheorie und der Quantenmechanik. Erstere ist hauptsächlich auf Albert Einstein zurückzuführen, während für letztere Wissenschaftler wie Wolfgang Pauli, Werner Heisenberg und Erwin Schrödinger namhafte Beispiele für Mitbegründer sind. Beide veränderten den Blick auf die beobachtete Realität, wobei die Relativitätstheorie noch eher an klassischen Prinzipien wie Trajektorien und scharfen Eigenschaften von physikalischen System festhielt, wohingegen die Quantenmechanik (etwas im Rahmen der Kopenhagener Deutung) vorwiegend mit Wahrscheinlichkeitsaussagen auskommen muss. An dieser Abweichung von klassischen Prinzipien störten sich Albert Einstein, Boris Podolsky und Nathan Rosen (i. F. seien diese drei Namen durch "EPR" abgekürzt) und formulierten ein Gedankenexperiment, dessen Konsequenz eine klassische Sichtweise der Quantenmechanik sein sollte, deren Aspekte nur noch nicht entdeckt wurden. 1964 gelang es John Stewart Bell diese Überlegungen in Form einer Ungleichung zu quantifizieren, die eine Widerlegung einer klassischen bzw. nicht-klassischen Quantenmechanik möglich machen sollte.

2 Versuchsziel

Nach Inbetriebnahme und Aufnahme der Strom-Leistungs-Kennlinie des im Versuch verwendeten Lasers steht der Test der Bell'schen Ungleichung (bzw. der Test einer Bell'schen Ungleichung, da mit der Zeit verschiedene Formulierungen hervorgegangen sind) im Vordergrund. Dazu werden die im Gedankenexperiment im Fokus stehenden verschränkten Polarisationszustände einer Lichtquelle (hier des Lasers) hergestellt, die eine Verletzung der Bell'schen Ungleichung für bestimmte Polarisationen aufweisen sollen. Die Qualität der Verschränkung spielt für eine Beurteilung der Messergebnisse eine wesentliche Rolle, sodass auch die Konversionseffizienz und der Michelson-Kontrast der Korrelationsmessungen bestimmt wird.

3 Theoretische Grundlagen

3.1 Verschränkte Zustände eines quantenmechanischen Systems

Die bereits erwähnten verschränkten Zustände liefern die Grundlage für EPR's Gedankenexperiment. Ihre Besonderheit liegt in der Art und Weise, wie die Wellenfunktion eines solchen Zustands bei einer Messung kollabiert. Mathematisch handelt es sich bei einem quantenmechanischen Zustand um ein Element des Hilbertraums H in d Dimensionen. Dieser Raum besitzt eine Basis, wobei in dieser Ausarbeitung die Basisvektoren in Ket-Schreibweise mit $|i\rangle$, $i \in \{1,...,d\}$ bezeichnet werden. Für H findet sich also eine Orthonormalbasis $\{|i\rangle_H\}$, in der ein Zustand $|\Phi\rangle_H$ aus H mit komplexen Koeffizienten $\omega(|\Phi_H\rangle)_i$, die über das übliche L^2 -Skalarprodukt gegeben sind, entwickelt werden kann:

$$|\Phi_H\rangle = \sum_{i=1}^{d} \omega(|\Phi_H\rangle)_i |i\rangle_H$$
 (1)

Für ein Mehrteilchensystem aus N Teilchen wird dann das Tensorprodukt der N Hilberträume zugrunde gelegt, also $H_{\rm ges} = H_1 \otimes ... \otimes H_N$ mit jeweiliger Orthonormalbasis $\{|{\bf i}\rangle_{H_{\rm j}}\}$ (die Dimensionen der Räume müssen i. A. nicht identisch sein). Im einfachsten Fall ist ein Element aus diesem Hilbertraum durch das Tensorproodukt der Elemente der einzelnen Hilberträume gegeben:

$$\left|\Phi_{H_{\text{ges}}}\right\rangle = \bigotimes_{i=1}^{N} \left|\Phi_{H_{j}}\right\rangle \tag{2}$$

Das Tensorprodukt zweier Zustände (i. A. ist $n \neq d$) ist dabei definiert als

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ \dots \\ a_n \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} b_1 \\ \dots \\ b_d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 \cdot b_1 \\ \dots \\ a_2 \cdot b_1 \\ \dots \\ a_2 \cdot b_d \\ \dots \\ a_n \cdot b_1 \\ \dots \\ a_n \cdot b_d \end{pmatrix}$$
(3)

Stellenweise werden in dieser Ausarbeitung die Tensorproduktzeichen weggelassen und durch nebeneinander stehende Kets angedeutet. Von diesen Zuständen können wieder Linearkombinationen gebildet werden (i. F. dargestellt als Summe mit Koeffizienten $\omega_{\rm m}$), was alle Elemente des Mehrteilchenraums liefert. Lässt sich ein solcher Zustand als konvexe Summe von Tensorprodukten aus Einteilchenzuständen schreiben, also

$$\sum_{\mathrm{m=1}}^{M} \omega_{\mathrm{m}} \left| \Phi_{H_{\mathrm{ges}_{\mathrm{m}}}} \right\rangle = \sum_{\mathrm{k=1}}^{K} \tilde{\omega}_{\mathrm{k}} \bigotimes_{\mathrm{j=1}}^{\mathrm{N}} \left| \Phi_{H_{\mathrm{j}}} \right\rangle_{\mathrm{k}} \tag{4}$$

mit

$$\tilde{\omega}_{k} \ge 0 \text{ und } \sum_{k=1}^{K} \tilde{\omega}_{k} = 1$$
 (5)

so wird ein solcher Zustand auch separabel genannt. Ist eine solche Aufspaltung nicht möglich, so wird der Zustand als verschränkt bezeichnet. $\left|\Phi_{H_{\rm j}}\right\rangle_{\rm k}$ bezeichnet hierbei einen für die Gleichheit geeigneten Zustand aus $H_{\rm j}$ und $\tilde{\omega}_{\rm k}$ geeignete Koeffizienten. Die Normierung wird bei diesen Überlegungen außen vor gelassen.

Beispiele für separable und verschränkte Zustände ergeben sich bei Betrachtung von horizontaler und vertikaler Polarisation zweier Photonen. I. F. sei ein Polarisationszustand durch $|i\rangle_j$ gegeben, wobei i für die Polarisation und j das erste bzw. zweite Photon steht. Horizontale $|H\rangle$ und vertikale $|V\rangle$ Ausrichtung werden als orthogonale

Basisvektoren aufgefasst, d. h. $\{|H\rangle, |V\rangle\} = \{\begin{pmatrix} 1\\0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0\\1 \end{pmatrix}\}$. Die durch Einteilchenzustände realisierbaren Zustände des Zweiteilchenraums sind dann

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$
 (6)

Die Linearkombination

$$|\xi\rangle = |H\rangle_1 |H\rangle_2 + |V\rangle_1 |V\rangle_2 + |H\rangle_1 |V\rangle_2 + |V\rangle_1 |H\rangle_2 = \begin{pmatrix} 1\\1\\1\\1 \end{pmatrix}$$
 (7)

lässt sich auch umschreiben als

$$|\xi\rangle = (|H\rangle_1 + |V\rangle_1) \otimes (|H\rangle_2 + |V\rangle_2) \tag{8}$$

mit einem Koeffizienten $\tilde{\omega}_1 = 1$. Diese Darstellung ist konvex und $|\xi\rangle$ somit separabel. Dagegen findet sich für die Linearkombination

$$|\psi\rangle = (|H\rangle_1 |H\rangle_2 + |V\rangle_1 |V\rangle_2) = \begin{pmatrix} 1\\0\\0\\1 \end{pmatrix} \tag{9}$$

keine Darstellung wie in (4). Dieser Zustand ist verschränkt.

3.2 Historisches

Um EPR's Problem mit der Quantenmechanik zu verstehen, sind zwei Begriffe einzuführen:

Lokalität: Information kann sich nach der Relativitätstheorie im optimalen Fall nur mit Lichtgeschwindigkeit verbreiten. Werden im Sinne der Relativitätstheorie gleichzeitige Messungen an verschiedenen Orten vorgenommen, so können Informationen dieser Messungen maximal mit Lichtgeschwindigkeit an die jeweils andere übermittelt werden. Liegen die Messungen also weit genug auseinander, so dürfte es zu keiner gegenseitigen Beeinflussung jedweder Art zwischen den beiden Ereignissen kommen.

Realismus: Ähnlich der Erwartung, dass wenn ein dunkler Raum erleuchtet wird, sich die physikalische Realität bereits vor Anschalten des Lichts festgelegt hat und mögliche zu messende Eigenschaften bereits vor der Messung feststehen, erwarten klassische Ansätze, dass ein physikalisches System sich zu jeder Zeit in einem fest definierten Zustand befindet, der sich durch eine Messung nachweisen lassen sollte.

Das von EPR konstruierte Gedankenexperiment führt nun zumindest eine der Annahmen zum Widerspruch. Dabei wird von einem Paar verschränkter Quantenteilchen ausgegangen, dessen Bestandteile sich in voneinander entgegengesetzte Richtung fortbewegen, o. B. d. A. seien die hier links und rechts. Es werden nun Messungen von Teilcheneigenschaften an Orten durchgeführt, die einen Austausch von Information innerhalb der Messzeit nicht zulassen. Wird nun etwa der Impuls des linken Teilchen gemessen, so ergibt sich aus der Verschränkung der Impuls des rechten Teilchens. Eine zeitgleiche Messung des Ortes des rechten Teilchens liefert auch den Ort des linken. So wurden durch Messungen von Eigenschaften eines Teilchen Eigenschaften eines anderen festgelegt.

Falls Realismus gegeben ist, verstößt dies gegen Lokalität, da im Gedankenexperiment davon ausgegangen wird, dass kein Austausch von (bereits vorher feststehenden) Informationen zwischen den Messungen innerhalb der Messzeit stattfinden kann. Es muss dann eine unbekannte, instantane Wechselwirkung zwischen den Teilchen erfolgt sein. Falls Lokalität vorliegt, so ist Realismus verletzt, weil die einzige Möglichkeit der Unkenntnis des Systems dann in den Teilchen selbst liegt. In diesem Fall gibt es einen unbekannten Ausgangszustand mit unbekannter Zeitentwicklung, die das Verhalten eines Teilchens bei einer Messung festlegt.

Da EPR an Lokalität festhalten wollten, wurde von einer Unvollständigkeit der Quantenmechanik ausgegangen. Zu diesem Schluss kamen EPR einerseits aus den eben besprochenen Gründen, aber auch, weil ein Widerspruch zur Heisenberg'schen Unbestimmtheitsrelation vorläge, die besagt, dass sich komplementäre Größen (also Impuls und Ort, oder Energie und Zeit) nicht gleichzeitig scharf bestimmen lassen. Ein Ausweg sollten also "versteckte" Parameter sein, die das Verhalten des Systems im Vornherein festlegen. Im besten Fall sollten diese Prozesse deterministisch sein, um den Realismus zu erhalten.

3.3 Bell'sche Ungleichung

Bell gelang es, diese sehr allgemeinen Forderungen zu formalisieren. Es ist möglich, beliebige komplementäre Größen, etwa Ort und Impuls, zu betrachten. Allerdings ist eine experimentelle Realisierung nur sehr schwer möglich, weshalb oft auf einfacher zu untersuchende Größen wie Spin und Polarisation zurückgegriffen wird, wobei sich letztere im Rahmen dieses Versuchs bereits angedeutet hat.

In Bell's Theorie wird von einer Quelle ausgegangen, die verschränkte Photonen in entgegengesetzte Richtungen aussendet. In geeigneten Abständen von der Quelle befinden sich auf zwei gegenüberliegenden Seiten Polarisatoren, welche jeweils die Untersuchung von zwei Winkeln zulassen. Abbildung 1 veranschaulicht diese Situation.

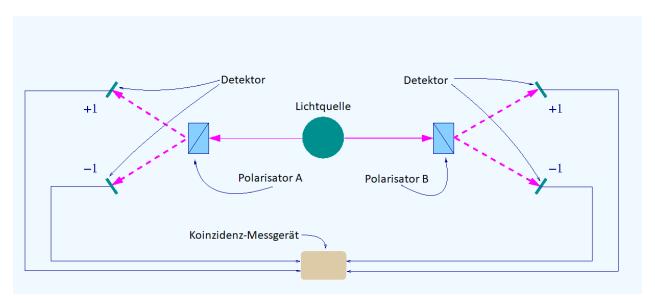


Abbildung 1: Schematischer Aufbau zur Untersuchung der Bell'schen Ungleichung. Die in de Abbildung grüne Lichtquelle sendet polarisationsverschränkte Photonenpaare in Richtung von Detektor A und Detektor B aus. Polarisator A misst, ob die Winkel α_1 oder α_2 vorliegen, Polarisator B tut dies für Winkel β_1 und β_2 . Dass auch miteinander korrelierte Ereignisse als Messung gespeichert werden, garantiert eine entsprechende Messelektronik. [1, bearbeitet] https://en.wikipedia.org/wiki/Bell%27s theorem

Die Winkel werden mit α_i und β_i mit i=1,2 bezeichnet. Falls ein Photon einen Polarisator passiert, wird dies mit dem Messergebnis +1 versehen, ansonsten mit -1. Da dieses Messergebnis nur von den Winkeleinstellungen der Polarisatoren und den angenommenen versteckten Variablen (die üblicherweise mit λ betitelt werden) abhängt, können die zu erwartenden Messergebnisse folgendermaßen zusammengefasst werden:

$$a_{i} = a(\alpha_{i}, \lambda) = \pm 1 \tag{10}$$

$$b_{i} = b(\beta_{i}, \lambda) = \pm 1 \tag{11}$$

Die versteckten Variablen werden als durch zufällige Prozesse bestimmte Größen angesehen, da nichts weiteres über das mögliche Verhalten der versteckten Variablen bekannt ist. Es wird daher eine Wahrscheinlichkeitsdichte $\rho(\lambda)$ mit

$$\rho(\lambda) \ge 0 \text{ und } \int_{\{\lambda\}} d\lambda \ \rho(\lambda) = 1$$
(12)

angenommen. So können Erwartungswerte der Messergebnisse auf bekannte Weise berechnet werden (hier für α_1):

$$E[\alpha_1] = \int_{\{\lambda\}} d\lambda \ \rho(\lambda) \ a(\alpha_i, \lambda) \tag{13}$$

Um die Bell'sche Ungleichung zu formulieren, wird das Verhalten des folgenden Ausdrucks genutzt:

$$(a_1 + a_2)b_1 + (a_2 - a_1)b_2 = \pm 2 \tag{14}$$

Da dieser Ausdruck durch -2 und 2 beschränkt ist, wird sein Erwartungswert innerhalb des Intervalls [-2,2] anzufinden sein, was auf die gewünschte Ungleichung führt:

$$S_{\text{klass.}} := \left| \int_{\{\lambda\}} d\lambda \ \rho(\lambda) [(a_1 + a_2)b_1 + (a_2 - a_1)b_2] \right| \le 2$$
 (15)

Bis hierhin sind keine weiteren Annahmen als versteckte Variablen und eine lokal-realistische Sichtweise eingegangen. Nun trifft die Quantenmechanik auch Aussagen bezüglich der Erwartungswerte. Im Operatorformalismus ist für eine Größe A ihr Erwartungswert $\langle A \rangle$, falls sich das System im Zustand $|\psi\rangle$ befindet, durch

$$\langle A \rangle = \langle \psi | A | \psi \rangle \tag{16}$$

gegeben. Durch Identifizierung der Polarisationsrichtungen mit Spinoperatoren lassen sich winkelabhängige Erwartungswerte finden. $S_{\text{klass.}}$ wird im quantenmechanischen Fall maximal, falls die Polarisatoren so angeordnet sind, dass benachbarte jeweils einen Winkel von 22,5° einschließen. Es gilt dann:

$$S_{\text{QM}} := \left| \int_{\{\lambda\}} d\lambda \ \rho(\lambda) [(a_1 + a_2)b_1 + (a_2 - a_1)b_2] \right| = 2\sqrt{2} > 2$$
 (17)

So lässt sich experimentell nachweisen, welche Theorie verworfen werden kann.

3.4 Entwicklung der Polarisation

Um die für diesen Versuch relevanten polarisationsverschränkten Photonen herzustellen und zu untersuchen, werden Effekte aus verschiedenen Teilbereichen der Optik genutzt. Wenn die Polarisation \vec{P} eines Materials nicht mehr proportional zum einfallenden elektrischen Feld \vec{E} ist, ergeben sich neue Abhängigkeiten. I. A. hängen diese Größen von Ort \vec{x} und Zeit t ab, was aber für eine übersichtlichere Notation hier weggelassen wird. Es ergibt sich eine Entwicklung der Polarisation gemäß

$$P_{i} = \epsilon_{0} \left(\sum_{j} \chi_{i,j}^{(1)} E_{j} + \sum_{j,k} \chi_{i,j,k}^{(2)} E_{j} E_{k} + \sum_{j,k,l} \chi_{i,j,k,l}^{(3)} E_{j} E_{k} E_{l} + \dots \right)$$

$$(18)$$

Die Indizes i,j,k,l,... zählen dabei die Raumdimensionen x,y,z durch. ϵ_0 ist die elektrische Feldkonstante und $\chi^{(n)}$ der Suszeptibilitätstensor n-ter Stufe.

3.4.1 Anisotrope Optik

Der erste Summand der Entwicklung erklärt, falls es sich bei $\chi^{(1)}$ um einen Skalar handelt, bekannte lineare Phänomene wie die geometrische Optik. Dann weißt das Material einen einheitlichen Brechungsindex auf. Allerdings kann es sich bei $\chi^{(1)}$ auch um eine Matrix handeln, falls der Brechungsindex eines Materials von der Propagationsrichtung eines einfallenden Lichtstrahls abhängt. In diesem Fall wird das Material auch optisch anisotrop genannt. Ähnlich der Hauptachsen des Trägheitsmoments findet sich auch für anisotrope Materialien ein Koordinatensystem, entlang dessen Koordinatenachsen die Brechungsindizes konstant sind. Liegen zwei gleiche und ein von den anderen beiden verschiedener Brechungsindex vor, so handelt es sich um optisch ein-achsige Materialien.

Die in diesem Versuch verwendeten $\frac{\lambda}{4}$ - und $\frac{\lambda}{2}$ -Plättchen sind Beispiele für solche optisch ein-achsige Materialien und verändern die Polarisation eines einfallenden Lichtstrahls. Die Polarisation eines Lichtstrahls kann dabei entlang der und senkrecht zur optischen Achse der Plättchen zerlegt werden, sodass jede Polarisationskomponente das Material mit einer anderen Geschwindigkeit durchläuft. Abbildung 2 veranschaulicht dies.

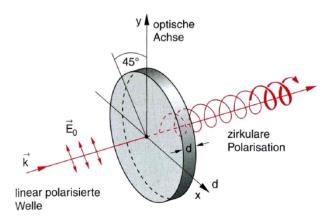


Abbildung 2: Wirkungsweise eines $\frac{\lambda}{4}$ -Plättchens. Linear polarisiertes Licht mit elektrischen Feld \vec{E} und Ausbreitungsrichtung \vec{k} wird entlang der und senkrecht zur optischen Achse zerlegt und erfährt aufgrund der verschiedenen Brechungsindizes für diese Achsen einen Weglängenunterschied, der von der Kristalllänge d abhängt. Fällt das linear polarisierte Licht im 45° -Winkel zur ausgezeichneten Achse ein, so entsteht zirkular polarisiertes Licht. Für einen Winkel $\neq 45^{\circ}$ entsteht elliptisch polarisiertes Licht. [Halfmann]

Bei einer Wellenlänge λ des einfallenden Lichts erfährt das Licht somit nach Durchschreiten des Plättchens der Länge L eine Phasenverschiebung $\Delta \phi$ von

$$\Delta \phi = \frac{2\pi}{\lambda} L(n_{\perp} - n_{\parallel}) \tag{19}$$

Hierbei ist n_i der Brechungsindex senkrecht oder parallel zur ausgezeichneten Achse. Durch geeignete Längenwahl kann so für eine bestimmte Wellenlänge eine Phasenverschiebung um $\frac{\pi}{2} \cong \frac{\lambda}{4}$ oder $\pi \cong \frac{\lambda}{2}$ hergestellt werden.

3.4.2 Nichtlineare Optik

Der zweite Summand der Polarisationsentwicklung wird bei genügend großen elektrischen Feldern relevant. Etwas umgeschrieben lautet der Betrag dieses Summanden

$$P^{(2)} = \chi^{(2)} E^2 \tag{20}$$

Mit dem Ansatz der Überlagerung ebener Wellen der Frequenzen $\omega_1,\,\omega_2$ und reellen Amplitudenbeträgen $E_1,\,E_2$

$$E = E_1 e^{-i\omega_1 t} + E_2 e^{-i\omega_2 t} + E_1 e^{i\omega_1 t} + E_2 e^{i\omega_2 t}$$
(21)

ergibt sich für die Polarisation (i. F. bezeichne c.c. den komplex konjugierten Teil alles vorhergegangenen Summanden innerhalb einer Klammer)

$$P^{(2)} = \chi^{(2)} (E_1^2 e^{-i\omega_1 t} + E_2^2 e^{i\omega_2 t} + 2E_1 E_2 e^{-i(\omega_1 + \omega_2)t} + 2E_1 E_2 e^{-i(\omega_1 - \omega_2)t} + c.c.) + 2\chi^{(2)} (E_1^2 + E_2^2)$$
(22)

Die entstandenen Terme werden ihren entstehenden Lichtquanten entsprechend zugeordnet

Frequenzverdopplung : $P(2\omega_{\rm i})$ Summenfrequenzerzeugung : $P(\omega_1+\omega_2)$ Differenzfrequenzerzeugung : $P(\omega_1-\omega_2)$ Optische Gleichrichtung : P(0)

Diese Effekte lassen sich nur in geeigneten Materialien beobachten. Durch Einsetzen dieser Polarisation in die Maxwellgleichungen lässt sich die Intensität bestimmen, die maximal wird, falls die Impulserhaltung der Photonen gegeben ist, die je nach gewünschtem Effekt anders aussieht. Für diesen Versuch ist die Summenfrequenzerzeugung relevant, es gehen drei relevante Frequenzen ein:

$$\omega_1, \ \omega_2, \ \omega_3 = \omega_1 + \omega_2 \tag{23}$$

Impulserhaltung bedeutet in diesem Fall mit den zu den Frequenzen gehörenden Wellenvektorbeträgen $k_{\rm i}$ und reduzierten Planck'schen Wirkungsquantum \hbar

$$\hbar k_1 + \hbar k_2 = \hbar k_3 \tag{24}$$

Diese kann nur erfüllt sein, falls der Brechungsindex aller Komponenten identisch ist. In optisch linearen Medien ist der Brechungsindex nur von der Wellenlänge des einfallenden Lichts bestimmt (Dispersion). Die Komponenten verschiedener Wellenlänge erfahren dann unterschiedliche Brechung, es kommt zu destruktiver Interferenz und es sind keine nichtlinearen Effekte beobachtbar. Doppelbrechende Materialien können dies dagegen erfüllen. Durch Veränderung des Einfallswinkels des Lichts zum Material (Winkeltuning) oder Einstellen der Temperaturtuning) lässt sich eine optimale Anpassung für die Beobachtung der Effekte durchführen. In diesem Versuch wird dafür ein β -BaB₂O₄-Kristall (i. F. BBO-Kristall) verwendet.

3.5 Herstellung verschränkter Zustände

Nun kann die Herstellung verschränkter Zustände erklärt werden. Dazu werden zwei BBO-Kristalle benötigt, deren optische Achsen einen Winkel von 90° einschließen. Die ausgezeichnete Achse des der Lichtquelle zugewandten Kristalls falle mit der z-Achse zusammen. Siehe Abbildung 2. Es falle nun Licht (dessen Photonen auch als Pumpphotonen bezeichnet werden, weshalb Photonen aus des Lichtquelle mit einem Index P versehen werden) in den der Quelle zugewandten Kristall ein. Dessen linearer Polarisationszustand lässt sich dann allgemein beschreiben durch

$$|\psi\rangle_{P} = \cos(\Theta)|V\rangle_{P} + \sin(\Theta)|H\rangle_{P}$$
(25)

 Θ beschreibt den Winkel zwischen der ausgezeichneten Achse des der Quelle zugewandten Kristalls und dem elektrischen Feldvektor \vec{E} des einfallenden Lichts. Der Kristall ist dabei so geschliffen, dass er den zeitlich umgekehrten Prozess der Summenfrequenzerzeugung hervorrufen kann. Mit dieser und weiteren Eigenschaften des anisotropen BBO-Kristalls lässt sich aus der ersten Ordnung Störungstheorie herleiten, wie sich die Polarisationskomponenten verhalten, wenn sie in einen Kristall einfallen. Es ergeben sich Umwandlungen der Pumpphotonen gemäß

$$|V\rangle_{\rm p} \to |H\rangle_{\rm s} |H\rangle_{\rm i}$$
 (26)

$$|H\rangle_{\rm p} \to {\rm e}^{i\phi} |V\rangle_{\rm s} |V\rangle_{\rm i}$$
 (27)

 ϕ stellt eine sich bei der Umwandlung einstellende Phasenverschiebung dar. s steht für "signal" und i für "idler", was historische Gründe hat. Die entstehenden Zustände weisen jeweils die halbe Frequenz des einfallenden Photons auf, was den umgekehrten Prozess der Summenfrequenzerzeugung darstellt. Allerdings kann ein Kristall nur eine Polarisationskomponente umwandeln, weshalb zwei Kristalle mit orthogonale zueinander ausgerichteten, ausgezeichneten Achsen verwendet werden müssen. Der neue Zustand lautet dann

$$|\psi\rangle = \cos(\Theta) |H\rangle_{s} |H\rangle_{i} + e^{i\phi} \sin(\Theta) |V\rangle_{s} |V\rangle_{i}$$
(28)

An geeigneter Stelle ging in dieser Überlegungen ein, dass die Kristalle sehr dünn in Lichtausbreitungsrichtung sein müssen, damit für das umgewandelte Licht die Information, aus welchem Kristall welche Komponente entstammt,

verloren geht. Da die Ausbreitung des umgewandelten Lichts auf Konussen abläuft, ist dies durch ein ineinander verschmieren der Konusse gegeben. Die Beschreibung des umgewandelten Lichts erfolgt dann in einer beliebigen Polarisationsbasis, was eine Bedingung für Verschränkung ist. Dies ist in Abbildung 2 veranschaulicht.

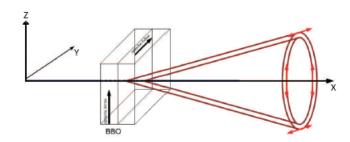


Abbildung 3: Anordnung der Kristalle im Versuchsraum. Die z-Achse weise vom Boden weg. Die schwarzen Striche in den Kristallen, die durch Quader angedeutet sind, markieren die ausgezeichnete Achse der anisotropen Medien. Die Pfeile an den von den Konussen gebildeten Kreisen deuten die Polarisationsrichtung der umgewandelten Photonen an. [Anleitung, bearbeitet]

Weiterhin zeigt ein Vergleich mit dem Beispiel aus Kapitel 3.1, dass für die Winkel Θ =45° und $\phi = \frac{k\pi}{2}$, $k \in \mathbb{Z}$ ein (bis auf ein mögliches Vorzeichen im zweiten Summanden) verschränkter Zustand vorliegt, der auch normiert ist:

$$|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|H\rangle_{s}|H\rangle_{i} + |V\rangle_{s}|V\rangle_{i}) \tag{29}$$

Dieser Zustand verletzt die Bell'sche Ungleichung für den Wert $S_{QM}=2\sqrt{2}$ maximal und wird daher Bell-Zustand genannt.

3.6 Experimentelle Realisierung

Eine Skizze des Aufbaus findet sich in Abbildung 3.

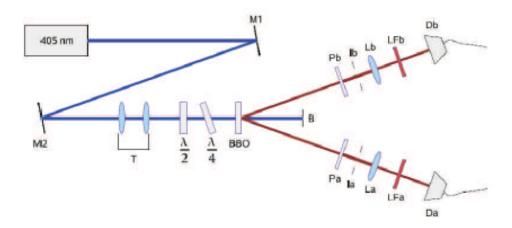


Abbildung 4: Skizze des Versuchsaufbaus. M1 und M2 stellen die zur Justage benötigten Spiegel dar. Die Linsenanordnung T dient als Teleskop. Es folgen die Verzögerungsplättchen, wobei mittlerweile nur das $\frac{\lambda}{2}$ -Plättchen genutzt wird. Der Vollständigkeit halber seien hier beide erwähnt. Der BBO-Kristall sorgt für die Umwandlung des Lichts und sendet es auf einer Konusform aus, entlang derer sich Polarisator (Pa und Pb) und Detektoranordnung (alles rechts von Pa und Pb) befinden. Ganz rechts ist eine die mit einem Computer verbundene Verkabelung angedeutet. [Anleitung]

Es wird Licht der Wellenlänge 405nm in ein Spiegelsystem gestrahlt, was eine (falls notwendig) einfachere Justage als durch Veränderung der Laserposition ermöglicht. Das Licht gelangt dann in ein Linsensystem, welches als Teleskop fungiert, um möglichst viele Strahlen, die nicht parallel zur optischen Achse des Systems verlaufen, parallel zur dieser auszurichten. Die Verzögerungsplättchen dienen der Feinjustage der Laserpolarisation, sodass der gewünschte

45° Winkel zwischen ausgezeichneter Achse des ersten Kristalls und Polarisation gegeben ist. Es folgen die beiden BBO-Kristalle zur Erzeugung des polarisationsverschränkten Lichts. Da nicht alle Anteile des einfallenden Lichts diesen Effekt erfahren, wird mit einem Strahlblocker ungewünschtes Laserlicht verdeckt. Entlang der Konusform sind auf zwei Schenkeln jeweils ein Polarisator und Detektorsystem angebracht. Die Polarisatoren dienen neben der Winkeleinstellung für die Überprüfung der Vorhersagen der Quantenmechanik auch der Überprüfung einer ordentlichen Korrelationsmessung. Diese wird durch die Detektorsysteme, die mit einem Computer verbunden sind, auf dem die Daten gespeichert werden, durchgeführt. Das Vorgehen dabei ist folgendes: Ein Photon passiert einen Polarisator und gelangt in die Photodiode eines Detektors. Das so entstandene Signal startet ein Zeitfenster in einer mit dem Detektor verbundenen Zähleinheit. Dieses bleibt so lange offen, bis im anderen Detektor ein weiteres Photon gemessen wird. Sobald dies der Fall ist, so wird das Zeitfenster geschlossen und keine weiteren Ereignisse, die in der Zeit zwischen Schließung und Öffnung des Zeitfensters liegen, als Messung gezählt.

4 Versuchsdurchführung und Auswertung

4.1 Versuchsaufbau

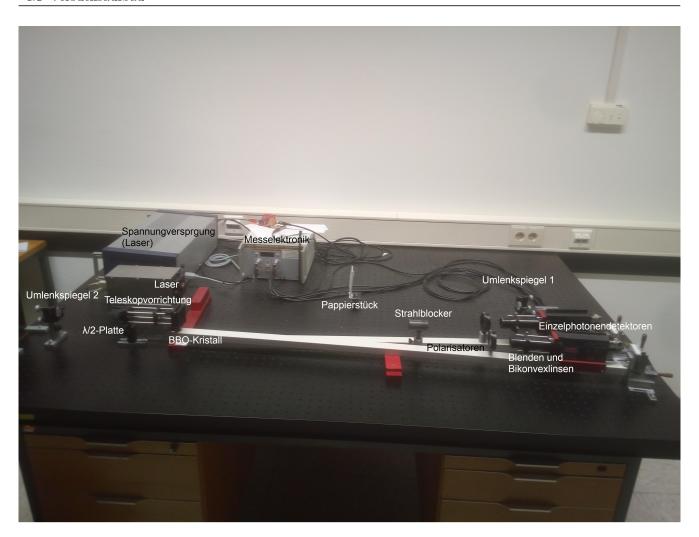


Abbildung 5: Versuchsaufbau auf einem Optischen Tisch. Der Laser sowie dessen Ansteuerungselektronik. Die Umlenkspiegel, Teleskopvorrichtung, $\lambda/2$ -Platte, BBO-Kristall, Polarisatoren, Irisblenden, Bikonvexlinsen und Einzelphotondetektoren sowie deren Ausleseelektronik.

Im Versuch lag ein Laser vor der mittels zweier Spiegel ausgerichtet werden konnte. Ein nachfolgender Teleskopaufbau sollte den Laserstrahl in seinem Durchmesser minimieren, um die Leistungsdichte zu erhöhen. Mithilfe des darauffolgenden $\frac{\lambda}{2}$ -Plättchens wird dafür gesorgt, dass der Anteil an Licht welches horizontal Polarisiert ist (im Bezug auf eine beliebige Achse), gleich dem an vertikal Polarisiertem ist. Damit die verschränkten Photonen erzeugt werden, werden zwei BBO-Kristalle genutzt. Dabei sind nur diese Photonen verschränkt, welche aus den

Überlappbereich beider Koni stammen, die aufgrund der Strahldivergenz der beiden zueinander senkrechten Kristalle versetzt voneinander sind. Damit unverschränke Photonen die Messung nicht beeinflussen werden diese durch einen Strahlblocker absorbiert. Die verschränken Photonen gelangen jeweils durch einen Polaristor und anschließend durch eine Blende sowie Linse die die durchgelassen Photonen auf die Einzelphotonendetektoren optimal fokussiert. Weite Messwelektronik bestimmt die Anzahl der Koinzidenzen sowie der zufälligen Koinzidenzen die von den gemessenen Abgezogen werden. Diese zufälligen werden so bestimmt, dass die beiden Detektoren zeitlich versetzt laufen, sodass gemessene koinzidenzen keineswegs von verschränken Photonen stammen können. Diese können als "Untergrund" von den gemssenen Abgezogen werden um die "wahre" Anzahl der Koinzidenzen zu ermitteln.

4.2 Strom-Leistungs-Kennlinie

Vor dem eigentlichen Ziel des Versuchs, soll grundlegend die Leistungskennlinie eines Lasers untersucht werden. Es wird erwartet, dass ein schwacher Linearer Verlauf vorliegt, bei dem überwiegend spontane Emmision vorliegt. Steigt der Strom über einen gewissen Schwellwert, so fängt die stimulierte Emmision an die Spontane zu überwiegen. Da dies ein Übergangsprozess ohne scharfe Kante ist, soll mittels geeigneter Messpunktewahl die Bestimmung des Schwellwertes optimiert werden. Hierzu wird bei ausgeschaltetem Laser die Halterung für das Leistungsmessgerät auf dem Optiktisch montiert. Der Laser wird angeschaltet und mit dem Papierstück überprüft ob der Strahl möglichst vollständig auf der Sensorfläche auftrifft. Das Leistungmessgerät wurde auf die vom Laser emmitierte Wellenlänge von 405 nm eingestellt. Da die Spannungversorgung des Lasers den Strom ausgibt, der mit einem Offset von (2,35±0,05)mA von Null ausgehend behaftet ist, wird dieser bei der Auswertung mit beachtet. Der höchste dem Laser zuträgliche Strom lag bei 70 mA, somit wurde zu beginn in 5 mA Schritten über den Bereich die Leistungen gemessen, um den Übergangsbereich genauer zu erfassen wurde danach der Schwellwert grob bestimmt und um diese Abschätzung neu vermessen. Zur Bestimmung des Schwellstroms wurde eine lineare Funktion an den Bereich des Verlaufs angepasst, bei dem Laseraktivität vorlag (ab ca. 42 mA bis ca. 75mA). Dafür wurden die vorheringen Messwerte die nicht oder nicht ausschließlich der Laseraktivität zuzuordnen waren für die Anpassung ausgeschlossen. Über die Lineare Anpassungsfunktion:

$$P(I) = m * I + b \tag{30}$$

konnte die Laserschwelle bestimmt werden indem hierfür P(I)=0 gesetzt wurde. Es ergab sich $(P_0)=39,62\pm0,12$ mA für den Schwellstrom. Die angepassten Parameter ergaben sich zu $m=(1,4145\pm0,0024)\frac{W}{A}$ und $b=(-56,04\pm0,13)mW$. Das Bestimmtheitsmaß R^2 liefert einen Wert zu 80% was für eine gute Anpassung in diesem Bereich hindeutet. Die Messwerte sowie die lineare Anpassung sind der folgenden Abbildung zu entnehmen:

Strom-Leistungs-Kennlinie

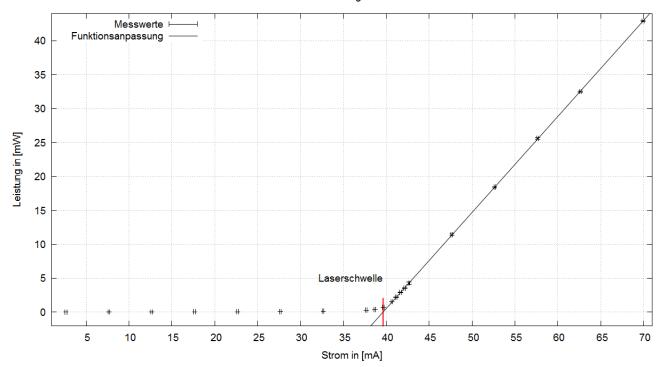


Abbildung 6: Aufgenomme Messwert der Strom-Leistungs-Kennlinie, sowie die Lineare Anpassung durch die Werte ab 42 mA. Ebenso wurde der durch die angepasste Funktion bestimmte Schwellstrom eingetragen

4.3 Bellzustand

Damit die Bellsche Ungleichung und die ihr zugrundeliegenden Annahmen überprüft werden können, muss der Aufbau auf den Bell-Zustand hin präpariert werden. Dieser ist dadurch gegeben dass an beiden Detektoren, bei gleicher Polarisatoreinstellung, die Anzahl der gemessenen Photonen übereinstimmt. Dafür muss das $\lambda/2$ -Plättchen in einem Winkel 45° zur Ausrichtung des BBO-Kristalls stehen. Dafür werden die Polarisatoren beider Strahlverläufe gleich ausgerichtet und die Ausrichtung der $\lambda/2$ -Platte variiert. Die so entstehenden Verläufe haben für die Einstellungen der $\lambda/2$ -Platte den gleichen Wert für den der Bell-Zustand eingestellt ist. An die Messwerte wurde eine \cos^2 -Funktion angepasst. Aus diesen Anpassungen wurde im Versuch die Einstellung des Bellzustandes grob abgeschätzt auf ca. 5°. Dies trifft auch bei genauerer Betrachtung zu. Hierfür wurde der Schnittpunkt einer jeden Anpassung mit den anderen falls vorhanden bestimmt und anschließend über alle gemittelt. Werte die wiedersprüchlich zu den anderen waren wurden hierbei ausgelassen. Für die Messung wurde der Winkel des $\lambda/2$ -Plättchen von 0° bis 90° in 10° Schritten variiert. α und β , die Winkeleinstellung der Polarisatoren, wurden zwischen 0° und 180° in 20° Schritten variiert. Der Laser wurde bei einem Strom von 70mA betrieben. Die Koinzidenzen wurden hierbei über einen Zeitraum von 10s gemessen. Die Fehler der Winkeleinstellungen wurde auf 1° geschätzt. Die zur Anpassung genutze Funktion war:

$$I(\alpha) = A \cdot \cos(B \cdot x + C) + D \tag{31}$$

Die jeweiligen Anpassungen sowie die Messwerte sind in nachfolgender Abbildung aufgetragen.

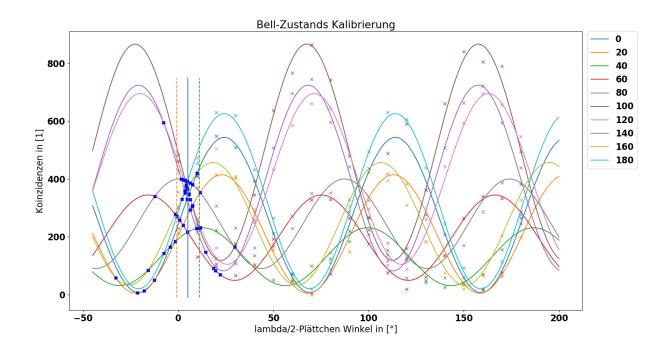


Abbildung 7: Koinzidenzen der verschiedenen Einstellungen der Polarisatoren über den Winkel der $\lambda/2$ -Platte, sowie die jeweiligen Anpassungen und deren Schnittpunkte. Ebenfalls der Mittelwert der Schnittpunkte und 1σ -Intervall

Es ergibt sich der Bellzustand für einen Winkel von $5^{\circ}\pm5.9^{\circ}$ für das $\lambda/2$ -Plättchen. In der Abbildung ist einerseits zu erkennen, das die Anpassungen die Messwerte gut wiedergeben können. Andererseits ist zu erkennen, dass die Schnittpunkte der einzelnen Funktionen stark streuen. Dies ist auch die Erklärung für die große Ungenauigkeit für den Winkel des Bellzustandes. Es ist anzumerken, dass für die Mittelwertbildung über die Schnittpunkte die ersten 6 und die letzten 3 Werte ausgeschlossen wurden, da sie entweder zu Weit von der Erwartung entfernt sind bzw. es sich um keine Schnittpunkte handelt (Da eine analytische Lösung nicht möglich war, wurde nach lokalen Minima gesucht, was zu solchen Fehler führt).

4.4 Polarisationskorrelation

Um die Polarisationskorrelation zu messen wurde ein Winkel von $5^{\circ}\pm1^{\circ}$ für das $\lambda/2$ -Plättchen eingestellt. Ein Polarisator wurde in 45° Schritten von 0° bis 135° variiert. Der andere wurde zwischen 0° und 360° in 20° Schritten variiert. Anschließend wurden über die gleiche \cos^2 Funktion, Anpassung über die so enstandenen Verläufe gebildet. Es wird erwartet, dass die Amplitude unabhängig von der Winkeleinstellung gleich bleibt sowie die Konstante nahe 0 liegt, die Phasendifferenz der einzelnen Anpassungen sollte hierbei 45° betragen. Die aufgenommenen Messwerte sind in folgender Abbildung einzusehen.

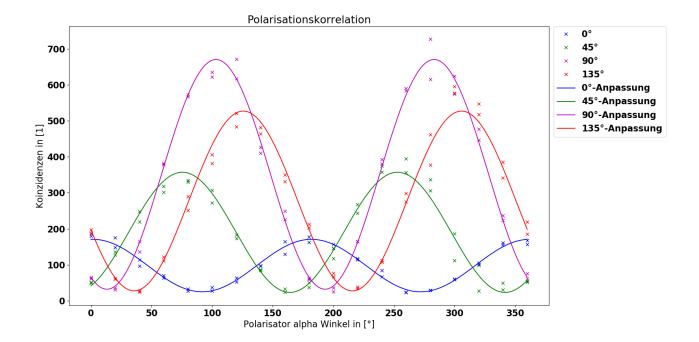


Abbildung 8: Koinzidenzen bei verschiedenen Einstellungen für β über die Einstellungen von α , beim Bell-Zustand

| α | Amplitude | Phasenverschiebung | Offset |
|------|------------|--------------------|-----------|
| 0° | 145,76 | 6,25 | 24,96 |
| 45° | $333,\!85$ | 50,5 | $15,\!53$ |
| 90° | 638,08 | $95,\!58$ | 32,17 |
| 135° | 499,5 | 134,47 | 27,23 |

Tabelle 1: An die Messdaten Angepasste Parameter

Es ist festzustellen das die Amplitude wieder der Erwartung stark schwankt. Der Erwartung folgend sind hingegen die Werte für die Phasenverschiebung. Die Teils schlechten Werten könnten mit einen nicht genau eingestellten Bell-Zustand oder auch auf verunreinigte Kristalle hindeuten. Die Fehler der Phasenverschiebung sind hierbei etwas größer als die angenommene Unsicherheit, dennoch können sie die Erwartung bestätigen.

4.5 Bellwert

Die Werte bei denen maximale Verletzung der Bellschen Ungleichung vorliegen soll werden im Bell-Zustand Präpariert. Hierzu variiert α über 22,5°;67,5°;112,5° und 157,5° sowie β über 0°;45°;90° und 135°. Es wurde nur über 10s gemessen und nicht wie gefordert über 30s, dies kann die Messergebnisse hinreichend verschlechtern. Hierzu werden $E(\alpha,\beta), E(\alpha,\beta'), E(\alpha',\beta)$ und $E(\alpha',\beta')$ bestimmt. Die liefert einen Bellwert von 2,341±0,057. Damit ist die Bell'sche Ungleichung in diesem Versuch verletzt. Ebenfalls kann der Bellwert aus den Funktionsanpassungen der Polarisationskorrelationskurven bestimmt werden. Daraus ergibt sich ein Bellwert aus den Funktionen von 2,279±0,145. zwar ist auch für diese Werte eine Verletzung festzustellen die Ungenauigkeit ist aber recht hoch, was gegen diese indirekte Bestimmung sprechen kann. Ebenfalls könnte ein nicht sauber präparierter Bell-Zustand eine erklärung dafür liefern.

4.6 Michelson-Kontrast

Der Michelson-Kontrast gibt an wie gut das Verhältnis aus erzeugten verschränken Photonenpaaren zu den Gesamten erzeugten ist.

$$K = \frac{I_{max} - I_{min}}{I_{max} + I_{min}} = \frac{a}{a + 2b}$$
 (32)

Hierbei ist a die Amplitude der Polarisationskorrelationsanpassungen und b der Offset dieser.

| Winkel | Michelson-Kontrast |
|--------|--------------------|
| 0° | $0,74\pm0,032$ |
| 45° | 0.91 ± 0.027 |
| 90° | 0.91 ± 0.056 |
| 135° | 0.9 ± 0.058 |

Tabelle 2: Michelsonkontrat für die einzelnen Anpassungen

Da der Bell-Zustand dadurch gekenzeichnet ist, dass möglichst viele verschränke Photonen-Paare erzeugt werden und hierbei der Michelson-Kontrast zwischen 74% und 91% liegt, lässt sich der Bell-Zustand als für diesen Versuch ausreichen präpariert ansehen, wenn dieser auch nicht ganz präziese eingestellt wurde.

5 Fazit

Zum Anfang wurde eine grundlegende Kennlinie eines Lasers aufgenommen und der Schwellstrom bestimmt, die kleinen Ungenauigkeiten sprechen für die Methode und lieferten einen kleinen Einblick in das Laserprinzip. Es konnte weiterhin mittels von Koinzidenzmessungen der Bell-Zustand recht genau präpariert werden. Dabei wurde die dem Versuchaufbau zugrundeliegende Methodik verstanden und praktisch vertieft. Durch Messen verschiedener Polarisatoreinstellungen und anschließender Funktionsanpassungen, konnte einerseits der Michelson-Kontrast bestimmt werden, welche für eine gute Präparierung des Bell-Zustandes spricht, sowie die Verletzung der Bell'schen Ungleichung bestätig werden. Dies zeigte sich ebenfalls durch die Einzelmessungen, bei denen die größtmögliche Verletzung Erwartet wird, was nicht durch die Messung bestätigt werden konnte. Dennoch zeigten auch die deutlich die Verletzung der Ungleichung. Somit konnte gezeigt werden, dass unter der Annahme, dass die Quantenmechanik durch eine der Mathematik genügenden Wellengleichung und erlaubten Fourier Formalismus beschrieben wird, dass die Quantenmechanik die bessere Beschreibung der Natur liefert und keine Versteckten Variablen zu erwarten sind. Dadurch kann die Quantenmechanik keine lokale und realistische Theorie sein. Es kann immernoch Kritik an der Messmethode geübt werden, da um die Lokalität gänzlich zu Wiederlegen, die Detektoren in einen Abstand stünden müssten, bei dem keine überlichtschnelle Informationsübertragung standfinden könne.

6 Quellen

- [1] $http://www.physics.ttk.pte.hu/files/TAMOP/FJ_Nonlinear_Optics/3_the_nonlinear_polarization.html # Subsection3p1p3, Stand: 24.06.2018, 16:32 Uhr$
- [2] Prof. Dr. Thomas Halfmann, Vorlesungsskript zur Experimentalphysik III im Wise 2016/2017, TU-Darmstadt, Stand: 24.08.2016
- $[3] \ Versuchsanleitung \ Versuch \ 4.2, \ http://www.iap.tu-darmstadt.de/praktika/fp/abteilung-a, \ Stand: \ 24.06.2018, \ 16:39 \ Uhr$
- [4] C. Petermannn, Erzeugung polarisationsverschränkter Photonen durch Spontaneous Parametric Down Conversion (SPCD), TU-Darmstadt, 2005, S.15-20, S.22-36
- [5] Dietrich Dehlinger, M. W. Mitchel, Entangled photons, nonlocality, and Bell inequalities in the undergrauate laboratory, Physics Department, Reed College, 2002