

---

# 4.12: Design optischer Systeme

---

Maximilian Rudolf Lubba

Matrikel-Nr.: [REDACTED]  
[REDACTED]

Benjamin Wolfgang Kosmala

Matrikel-Nr.: [REDACTED]  
[REDACTED]

Betreuer: Jan Teske

Versuch durchgeführt am: 25. Juni 2018

Abgabedatum: 24. August 2018



TECHNISCHE  
UNIVERSITÄT  
DARMSTADT

Physikalisches Praktikum  
für Fortgeschrittene

Abteilung A

Hiermit versichern wir, das vorliegende Protokoll für das Physikalische Praktikum für Fortgeschrittene ohne Hilfe Dritter nur mit den angegebenen Quellen und Hilfsmitteln angefertigt zu haben. Alle Stellen, die aus Quellen entnommen wurden, sind als solche kenntlich gemacht. Diese Arbeit hat in gleicher oder ähnlicher Form noch keiner Prüfungsbehörde vorgelegen.

Darmstadt, den 24. August 2018,

\_\_\_\_\_  
Maximilian Rudolf Lubba

\_\_\_\_\_  
Benjamin Wolfgang Kosmala

---

1	Einleitung	2
2	Versuchsziel	2
3	Theoretische Grundlagen	2
3.1	Maxwell-Gleichungen . . . . .	2
3.2	Geometrische Optik . . . . .	3
3.3	Einfache optische Systeme . . . . .	4
3.3.1	Linsen . . . . .	4
3.3.2	Spiegel . . . . .	6
3.3.3	Linsensystem . . . . .	7
3.3.4	Mikroskop und Teleskop . . . . .	9
3.4	Matrixformalismus . . . . .	10
3.4.1	Freie Propagation entlang der optischen Achse . . . . .	11
3.4.2	Brechung an einer Grenzfläche . . . . .	12
3.4.3	Reflektion an einem Spiegel . . . . .	12
3.4.4	Brechung an einer Linse . . . . .	13
3.5	Linsenfehler . . . . .	13
3.5.1	Sphärische Aberration . . . . .	13
3.5.2	Koma . . . . .	14
3.5.3	Astigmatismus . . . . .	15
3.5.4	Bildfeldwölbung . . . . .	15
3.5.5	Verzeichnung . . . . .	16
3.5.6	Chromatische Aberration . . . . .	16
3.6	Physikalische Optik . . . . .	17
3.7	Kenngrößen von optischen Systemen . . . . .	18
3.7.1	Effektive Brennweite . . . . .	18
3.7.2	Blendenzahl . . . . .	18
3.7.3	Wellenfrontfehler . . . . .	18
3.7.4	Modulationsübertragungsfunktion . . . . .	19
4	Hubble-Teleskop	20
5	Versuchsdurchführung und Auswertung	21
5.1	Vorbereitung der Arbeitsumgebung . . . . .	21
5.2	Einzelne Sammellinse . . . . .	21
5.3	Singlett . . . . .	22
5.4	Optimierung des Singlett Systems . . . . .	26
5.5	Zweilinsensystem . . . . .	30
6	Hubble Teleskop	31
6.1	Optimierung des Hubble-Teleskops . . . . .	33
6.2	Fertigungsfehler am Hubble-Teleskop . . . . .	36
7	Fazit	37
8	Quellen	38

---

## 1 Einleitung

---

Die Nützlichkeit optischer Instrumente wurde schon vor einigen Jahrhunderten bzw. einem Jahrtausend erkannt. Dies führte zur Entwicklung der Lupe im 11. Jahrhundert [1], die eine Vergrößerung von makroskopisch dimensionierten Gegenständen in wenigen Zentimeter Entfernung ermöglichte. Weiterentwickelt wurde dieses durch kompliziertere Blendenanordnungen, die bei ähnlicher Entfernung von Beobachter und Gegenstand im 17. Jahrhundert [2] als Mikroskop Gegenstände im Bereich einiger Mikrometer auflösen konnten. Im Gegensatz dazu diente das im 17. Jahrhundert [3] erfundene Fernrohr bzw. Teleskop zur Vergrößerung von in einigen vielen Kilometer entfernten Gegenständen. So konnte militärisch Nutzen aus dem frühzeitigen Erkennen von Truppen gezogen oder sogar Himmelskörper beobachtet werden. Einen Höhepunkt seiner Entwicklung erreichte das Teleskop mit der Fertigstellung des Hubble-Teleskops im Jahre 1990 [4], welches nach einigen Nachbesserungen Aufnahmen von Objekten, die sich Lichtjahre von der Erde entfernt befinden, anfertigt. Die großen Zeitspannen ergaben sich nicht zuletzt dadurch, dass viel mit realen Linsen(-systemen) experimentiert werden musste, deren Erstellung zu damaligen Zeiten aufwendig und verglichen mit heutigen Standards nicht präzise genug für wissenschaftliche Arbeit waren. Eine Realisierung des Hubble-Teleskops auf diese Art und Weise wäre in den 25 Jahren seiner Entwicklung nicht möglich gewesen. Die Realisierung in dieser im Vergleich zu historischen Instrumenten kurzen Zeit war nur durch Computerunterstützung und Numerik möglich, deren Nutzung und Weiterentwicklung auch heutzutage noch im Fokus vieler Anwendungsbereiche liegt.

---

## 2 Versuchsziel

---

Dieser Versuch soll durch das Programm Zemax, welches optische Systeme simuliert, diese Arbeitsweise verdeutlichen. Dazu werden zunächst einfache Linsensysteme betrachtet. Eine Linse lässt bereits die Beobachtung einiger Strahlengänge im Rahmen der geometrischen Optik zu, ermöglicht eine Beurteilung einiger Kenngrößen des Systems und liefert Spielraum für Optimierung. Die Ergänzung einer weiteren Linse führt diese Prinzipien weiter. Anschließend soll der Aufbau des Hubble-Teleskops simuliert werden. Durch schrittweisen Aufbau der Bestandteile kann auch dieses System in Hinblick auf verschiedene Parameter optimiert werden. Zuletzt sollen die bei der ersten Version des Teleskops aufgetretenen Abbildungsfehler simuliert und mit dem optimierten System verglichen werden.

---

## 3 Theoretische Grundlagen

---

### 3.1 Maxwell-Gleichungen

---

Die allgemeinste Grundlage für alle optischen Effekte (d. h., alle Effekte, die in irgendeiner Weise die Ausbreitung von oder Interaktion mit elektromagnetischen Wellen involvieren) bilden die Maxwell-Gleichungen. In ihrer differentiellen Form lauten diese in SI-Einheiten [5]:

$$\operatorname{div}(\vec{D}(\vec{x}, t)) = \rho(\vec{x}, t) \quad (1)$$

$$\operatorname{div}(\vec{B}(\vec{x}, t)) = 0 \quad (2)$$

$$\operatorname{rot}(\vec{H}(\vec{x}, t)) = \frac{\partial \vec{D}(\vec{x}, t)}{\partial t} + \vec{j}(\vec{x}, t) \quad (3)$$

$$\operatorname{rot}(\vec{E}(\vec{x}, t)) = -\frac{\partial \vec{B}(\vec{x}, t)}{\partial t} \quad (4)$$

Dabei steht  $\vec{D}$  für den elektrischen Verschiebestrom,  $\rho$  für die Ladungsdichte,  $\vec{B}$  für die magnetische Flussdichte,  $\vec{H}$  für das Magnetfeld,  $\vec{j}$  für die Stromdichte,  $\vec{E}$  für das elektrische Feld,  $\vec{x}$  für den Ort und  $t$  für die Zeit. Die Abhängigkeit von den letzten beiden Größen wird stellenweise der Übersicht wegen weggelassen. Weitere Zusammenhänge zwischen den Größen sind gegeben durch [6]:

$$\vec{D} = \epsilon_0 \vec{E} + \vec{P} \quad (5)$$

$$\vec{B} = \mu_0 \vec{H} + \vec{M} \quad (6)$$

Hierbei steht  $\epsilon_0$  für die elektrische,  $\mu_0$  für die magnetische Feldkonstante,  $\vec{P}$  für die Polarisation und  $\vec{M}$  für die Magnetisierung eines Mediums.

Wie aus der nichtlinearen Optik bekannt, besteht zwischen  $\vec{P}$  und  $\vec{E}$  i. A. ein nichtlinearer, anisotroper Zusammenhang [7]:

$$P_i = \epsilon_0 \left( \sum_j \chi_{E_{ij}}^{(1)} E_j + \sum_{j,k} \chi_{E_{ij,k}}^{(2)} E_j E_k + \sum_{j,k,l} \chi_{E_{ij,k,l}}^{(3)} E_j E_k E_l + \dots \right) \quad (7)$$

Hierbei zählen die Indizes  $i,j,k,\dots$  die Raumdimensionen durch und  $\chi_E^{(n)}(\vec{x})$  steht für die elektrischen Suszeptibilitätstensor  $n$ .ter Stufe, der i. A. ortsabhängig ist. Ein analoger Zusammenhang stellt sich für die Magnetisierung ein.

### 3.2 Geometrische Optik

Für den Fall, dass es sich bei der elektrischen bzw. magnetischen Suszeptibilität um einen Skalar handelt, vereinfachen sich die Ausdrücke aus (5) und (6) zu

$$\vec{D} = \epsilon_0(\vec{E} + \chi_E \vec{E}) \equiv \epsilon_0 \epsilon \vec{E} \quad (8)$$

$$\vec{B} = \mu_0(\vec{H} + \chi_M \vec{M}) \equiv \mu_0 \mu \vec{H} \quad (9)$$

In diesem Fall werden  $\epsilon$  als die elektrische und  $\mu$  als die magnetische Permeabilität bezeichnet. Wird weiterhin angenommen, dass es keine freien Ladungs- bzw. Stromdichten gibt (also  $\vec{j} = \rho = 0$ ), so werden diese Gleichungen durch ebene Wellen gelöst. Genauer kann für diese folgende Form angenommen werden [5]:

$$\vec{E}(\vec{x}, t) = \vec{E}_0(\vec{x}) e^{ik[S(\vec{x}) - ct]} \quad (10)$$

$$\vec{H}(\vec{x}, t) = \vec{H}_0(\vec{x}) e^{ik[S(\vec{x}) - ct]} \quad (11)$$

Herbei stehen  $\vec{E}_0$  und  $\vec{B}_0$  für die Feldamplituden,  $i$  für die imaginäre Einheit,  $k$  für den Betrag des Wellenvektors  $\vec{k}$ , dessen Einheitsvektor  $\hat{k}$  durch  $\vec{B}_0 = \hat{k} \times \vec{E}_0$  und  $\vec{E}_0 = -\hat{k} \times \vec{B}_0$  definiert ist [8],  $S$  für das Eikonale und  $c$  für die Lichtgeschwindigkeit in Vakuum. Einsetzen dieses Ansatzes und betrachten des Grenzwerts  $k \rightarrow \infty$  (dies ist wegen  $|\vec{k}| = \frac{2\pi}{\lambda}$  äquivalent zu einer Wellenlänge, die gegen 0 geht, d. h., die Dimensionierung der charakteristischen Größen des Mediums, durch welches sich das Licht bewegt, sind groß gegenüber der Wellenlänge) liefert die Eikonalgleichung [5]:

$$[\text{grad}(S(\vec{x}))]^2 = (n(\vec{x}))^2 \quad (12)$$

Die Größe  $n$  wird als Brechungsindex des betrachteten Mediums bezeichnet und ist durch

$$n(\vec{x}) = \sqrt{\epsilon(\vec{x})\mu(\vec{x})} \quad (13)$$

gegeben. Er ist ein Maß dafür, wie schnell sich Licht in einem Medium mit diesem Brechungsindex bewegen kann gemäß  $c_{\text{Medium}} = \frac{c}{n}$ . Anders betrachtet, ist die Distanz, die das Licht zurücklegen muss, in verschiedenen Medien verschieden groß.

Die Bedeutung des Eikonals ergibt sich aus der Integration über einen Weg, der zwei Punkte  $Q$  und  $P$  verbindet. Der Weg sei stetig differenzierbar und über  $\gamma: [0, t'] \rightarrow \mathbb{R}^3$ ,  $t \mapsto \gamma(t)$  mit  $\gamma(0) = P$  und  $\gamma(t') = Q$  festgelegt. Es gilt:

$$S(Q) - S(P) = S(\gamma(t')) - S(\gamma(0)) \quad (14)$$

$$= \int_0^{t'} \frac{d}{ds} S(\gamma(s)) ds \quad (15)$$

$$= \int_0^{t'} \text{grad}(S(\gamma(s))) \cdot \dot{\gamma}(s) ds \quad (16)$$

$$= \int_0^{t'} |\text{grad}(S(\gamma(s)))| \cdot |\dot{\gamma}(s)| \cdot |\cos(\alpha(t))| ds \quad (17)$$

$$\leq \int_0^{t'} |\text{grad}(S(\gamma(s)))| \cdot |\dot{\gamma}(s)| ds \quad (18)$$

$$= \int_0^{t'} n(\gamma(s)) \cdot |\dot{\gamma}(s)| ds \quad (19)$$

$$= \int_{\vec{\gamma}} n(x) dx \quad (20)$$

wobei  $\tilde{\gamma}$  nun einen Weg auszeichnet, entlang dessen  $|\text{grad}(S(\gamma(s)))|$  und  $|\dot{\gamma}(s)|$  immer einen rechten Winkel einschließen. Aus Gleichung (20) geht hervor, dass das Eikonale also die Rolle eines Maßes der optischen Weglänge übernimmt. Auffällig ist, dass sich der Weg  $\tilde{\gamma}$  von beliebigen Wegen dahingehend unterscheidet, als dass er die Differenz der Eikonale maximiert (oder allgemeiner: extremal macht). Analog zum Hamilton'schen Prinzip der extremalen Wirkung in der klassischen Mechanik, in welcher die Bewegungsgleichungen eines physikalischen System dadurch gegeben sind, dass sie die Variation der Wirkung verschwinden lassen, besagt das Fermat'sche Prinzip, dass Lichtausbreitung auf den Trajektorien stattfindet, die Gleichung (20) (ausgedrückt für einen beliebigen Weg) maximiert [8]. Allgemein wird als Ansatz genutzt, dass sich die Laufzeit oder optische Weglänge für ein gegebenes Problem extremal verhalten soll, also sowohl minimal als auch maximal sein kann. Auf diese Art und Weise lässt sich das Snellius'sche Brechungsgesetz oder das Reflexionsgesetz (an ebenen Flächen) herleiten. Die beiden Gesetze sind in Abbildung 1 skizziert.

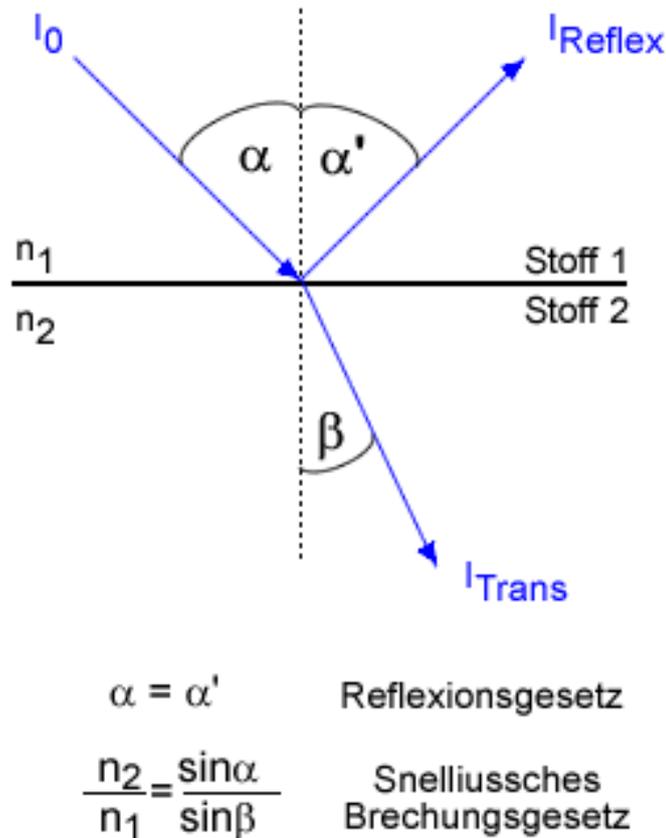


Abbildung 1: Veranschaulichung des Snellius'sches Brechungs- und Reflexionsgesetzes. Das Snellius'sche Gesetz stellt einen Zusammenhang zwischen den Winkeln her, die von einfallendem und gebrochenem Strahl jeweils mit der Flächennormale eingeschlossen wird. Genauer hängt dieser Effekt noch von der Polarisation der einfallenden Strahlung ab (Fresnel-Gleichungen) und dem Verhältnis der Brechungsindizes (im Fall  $n_2 < n_1$  gibt es einen Grenzwinkel  $\alpha_{\text{krit}} > 0$ , bei dem Totalreflexion auftritt) ab. Das Reflexionsgesetz besagt, dass Einfallswinkel und Ausfallswinkel eines reflektierten Strahl identisch sind. [9]

Die Lichtausbreitung durch Geraden zu beschreiben, bildet die Grundlage der geometrischen Optik.

---

### 3.3 Einfache optische Systeme

---

#### 3.3.1 Linsen

---

Eines der am häufigsten in allen Bereichen der Optik anzutreffendes Instrument ist die Linse. Sie besteht aus zwei lichtdurchlässigen, gekrümmten Oberflächen, die je nach Art der jeweiligen Krümmung verschiedene Eigenschaften aufweist. Diese Anordnung weist eine Rotationssymmetrie um eine ausgezeichnete Achse auf, die auch als optische Achse (i. F. manchmal mit "OA" abgekürzt) bezeichnet wird. Innerhalb eines optischen Systems aus verschiedenen Bestandteilen muss diese nicht immer gerade sein oder in eine Richtung verlaufen. Der Krümmungsradius

einer Oberfläche wird als positiv definiert, falls sie den Rand einer konvexen Menge bildet, andernfalls ist der Krümmungsradius negativ[10]. Diese Begriffe sind in Abbildungen 2 und 3 veranschaulicht.

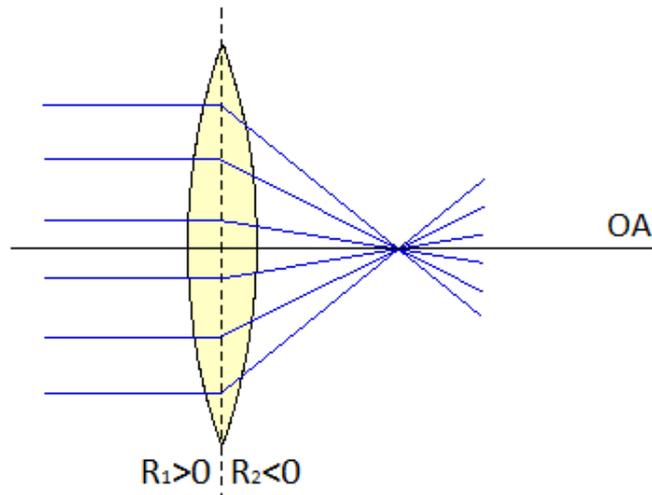


Abbildung 2: Aufbau einer (Bi-)Konvexlinse. Zur optischen Achse parallel, von links einfallendes Licht (blau) wird von ihr hin gebrochen. Unten sind die Vorzeichen der Krümmungsradien in Bezug auf das einfallende Licht eingetragen. [11, bearbeitet]

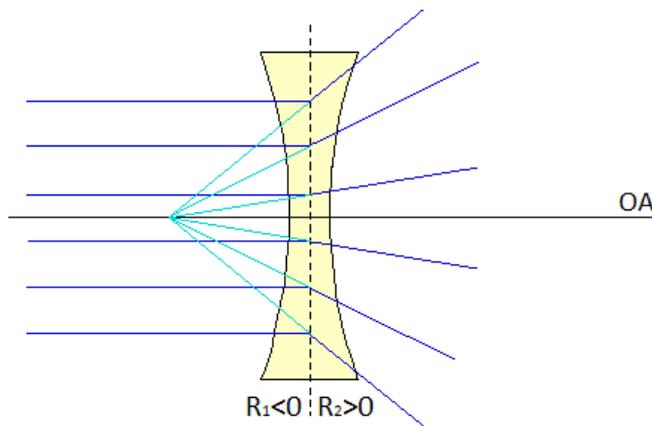


Abbildung 3: Aufbau einer (Bi-)Konkavlinse. Zur optischen Achse parallel, von links einfallendes Licht (blau) wird von ihr weggebrochen. Unten sind die Vorzeichen der Krümmungsradien in Bezug auf das einfallende Licht eingetragen. In türkis sind Strahlverläufe zu sehen, die einer punktförmigen Lichtquelle entstammen würden, sodass ihr Licht mit den von der Linse abgelenkten Strahlen zusammenfällt. [11, bearbeitet]

Es sind auch Kombinationen aus konvex- und konkav-Bestandteilen mit verschiedenen Krümmungsradien möglich. Hier wird von hinreichend dünnen Linsen ausgegangen, sodass die Lichtbrechung an den beiden gekrümmten Oberflächen durch eine Brechung an der Hauptebene ersetzt werden kann [6].

Auffällig sind die beiden Schnittpunkte der optischen Achse mit den parallel einfallenden, gebrochenen Strahlen bzw. der Ort einer Ersatz-Punktquelle. Dieser Schnittpunkt wird als Brennpunkt und sein Abstand zur Hauptebene als Brennweite  $f$  bezeichnet. Die Entfernung eines Gegenstands von der Hauptebene wird als Gegenstandsweite  $g$  und der Abstand vom Bild zur Hauptebene als Bildweite  $b$  bezeichnet. Mit Mitteln der geometrischen Optik

(Licht als Geraden, trigonometrische Zusammenhänge, Kleinwinkelnäherungen, d. h. für kleine Winkel  $\alpha$  gilt  $\sin(\alpha) \approx \tan(\alpha) \approx \alpha$ ) lassen sich zwei grundlegende Gleichungen zur Beschreibung einer dünnen Linse finden [6]:

Linsenmacher-Gleichung:

$$f = \frac{n_{\text{außen}}}{n_{\text{innen}} - n_{\text{außen}}} \frac{R_1 R_2}{R_2 - R_1} \quad (21)$$

Gauß'sche Linsengleichung:

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{g} + \frac{1}{b} \quad (22)$$

Hierbei bezeichnet  $n_{\text{außen}}$  den Brechungsindex des die Linse umgebenden Mediums und  $n_{\text{innen}}$  den Brechungsindex des Linsenmaterials und  $R_1$  und  $R_2$  sind auf den Strahlverlauf in Abbildungen 2 und 3 bezogen. Die Begriffe und wie durch eine Linse ein Bild entsteht wird in Abbildung 4 veranschaulicht. Für die Bildentstehung werden dabei drei Strahlen betrachtet: Strahl  $S_1$ , der vom Gegenstand parallel zur optischen Achse zur Linse gelangt und den Brennpunkt schneidet, Strahl  $S_2$ , der den Mittelpunkt der Linse (bzw. den Mittelpunkt des betrachteten Aufbaus) durchschreitet und Strahl  $S_3$ , der vom Gegenstand aus durch den Brennpunkt der Linse gelangt und das Bild parallel zur optischen Achse erreicht.

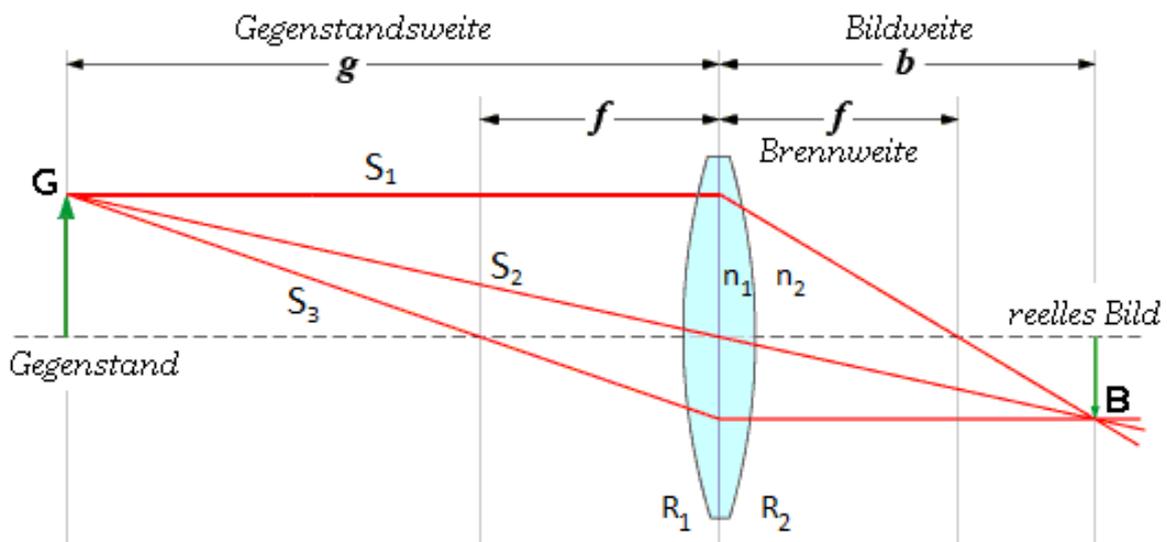


Abbildung 4: Übersicht der zentralen Begriffe zur Beschreibung einer Linse anhand eines Bikonvexaufbaus. Hier gilt  $n_1 = n_{\text{innen}}$  und  $n_2 = n_{\text{außen}}$ . Eingezeichnet sind auch Gegenstands- und Bildhöhe, welche sich über Trigonometrie ineinander umrechnen lassen. [12, bearbeitet]

Sind einige Parameter bekannt, so kann nach unbekanntem umgestellt werden. Für eine Linse mit Brennweite  $f = 10\text{cm}$ , die einen Brechungsindex  $n_{\text{innen}} = 1,5618$  aufweist und von Luft umgeben ist ( $n_{\text{außen}} \approx 1$ ), ergeben sich für die Krümmungsradien  $R_1$  und  $R'_1$  im Fall von  $R_2 = \infty$  und  $R'_2 = -R'_1$  unter Ausnutzung von Gleichung (22):

$$R_1 = f \cdot (n_{\text{außen}} - n_{\text{innen}}) \approx 5,168\text{cm} \quad (23)$$

$$R'_1 = 2 \cdot f \cdot (n_{\text{außen}} - n_{\text{innen}}) \approx 10,316\text{cm} \quad (24)$$

### 3.3.2 Spiegel

Eine weitere Möglichkeit, Licht weiterzuleiten bzw. zu beeinflussen, ergibt sich durch Spiegel. Diese können eine Krümmung aufweisen und erlauben so eine Fokussierung des Strahls. Da die geometrische Optik den kürzesten Lichtweg voraussetzt, kann über diese Bedingung die Form eines Spiegels, der parallel zur optischen Achse einfallende Strahlen in einen Punkt fokussiert, hergeleitet werden. Es ergibt sich [6]:

$$x = \frac{1}{4f} y^2 \quad (25)$$

Es handelt sich um einen Parabolspiegel. Allerdings weisen Spiegel i. A. Anfertigungsfehler auf oder werden aufgrund anderer gewünschter Eigenschaften nicht perfekt parabolisch ausfallen. Dann weist Gleichung (25) weitere Terme auf, die eine sphärische Oberfläche beschreiben. Der Parabolspiegel und seine Bildentstehung sind in Abbildungen 5 und 6 skizziert.

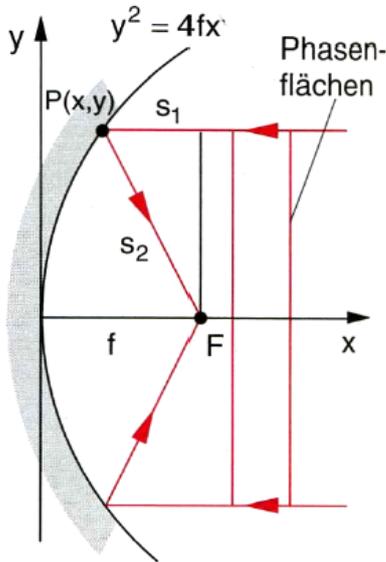


Abbildung 5: Aufbau eines Parabolspiegels. Parallel einfallende Strahlen in beliebiger Entfernung von der optischen Achse (hier die x-Achse) durch die Form des Spiegels so reflektiert werden, dass sie im Brennpunkt  $F$ , der die Brennweite  $f$  aufweist, aufeinandertreffen. [6]

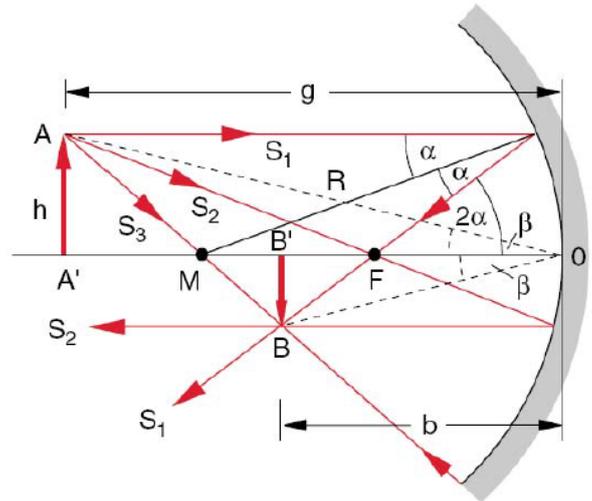


Abbildung 6: Bildentstehung bei einem Parabolspiegel. Wie bei der Linse wird diese durch drei Hauptstrahlen  $S_1$ ,  $S_2$  und  $S_3$  vollständig beschrieben. [6]

Es lässt sich auch für dieses System eine Gleichung zur Beschreibung von Brenn-, Gegenstands- und Bildweite angeben [13]:

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{g} + \frac{1}{b} = -\frac{2}{R} \quad (26)$$

Für  $R$  gilt dieselbe Vorzeichenkonvention wie schon bei den Krümmungsradien von Linsen.

### 3.3.3 Linsensystem

Nun bestehen optische Systeme nicht nur aus einer einzigen Linse oder Spiegel. Ein System aus zwei Linsen weist bereits interessante Eigenschaften auf und liefert die modellhafte Grundlage für Instrumente wie Fernrohre oder Mikroskope.

Mit Mitteln der geometrischen Optik und elementaren Rechnungen finden sich zwei zu Gleichung (21) und (22) ähnliche Gleichungen, die ein System aus zwei Linsen wie eine beschreiben. Für zwei Linsen der Brennweiten  $f_1$  und  $f_2$  im Abstand  $d$  lässt sich eine Gesamtbrennweite  $f_{ges}$  und Linsengleichung angeben [6]:

$$\frac{1}{f_{ges}} = \frac{1}{f_1} + \frac{1}{f_2} - \frac{d}{f_1 f_2} \quad (27)$$

$$\frac{1}{f_{ges}} = \frac{1}{g} + \frac{1}{b} \quad (28)$$

$g$  bezieht sich dabei auf die Linse, die dem Gegenstand zugewandt ist und  $b$  auf die Linse, die dem Bild zugewandt ist.

Falls sich die beiden Linsen im Abstand  $d = f_1 + f_2$  befinden, ergibt sich der Sonderfall  $\frac{1}{f_{ges}} = 0$ . einfallende Parallelstrahlen verlassen das Linsensystem also auch parallel. Dies kann verwendet werden, um z. B. den Durchmesser eines Laserstrahls einzustellen.

Ein weiteres Beispiel für ein einfaches Linsensystem ist eine Lupe. Das System besteht dabei aus der Lupenlinse

und der Augenlinse. Um einen Gegenstand aus der verschiedenen Abständen betrachten zu können, müssen die Augenmuskeln die Augenlinse entsprechend verformen, um ein scharfes Bild auf die Netzhaut abzubilden. Besonders bei geringen Abständen führt dies zu Ermüdungserscheinungen bzw. zu einer natürlichen Grenze der Einstellung der Augenlinse. Wird nun eine Bikonvexlinse mit Brennweite  $f$  in geeignetem Abstand vor das Auge gehalten und der Gegenstand in der Brennebene der Lupe platziert, so gelangen parallele Strahlen auf die Netzhaut. Gleichzeitig findet eine Vergrößerung des Gegenstandes statt, da der Sehwinkel nicht mehr durch den Abstand des Objekts zur Netzhaut sondern durch den Abstand zur Linse (also durch die Brennweite) bestimmt ist. Abbildung 7 veranschaulicht dies.

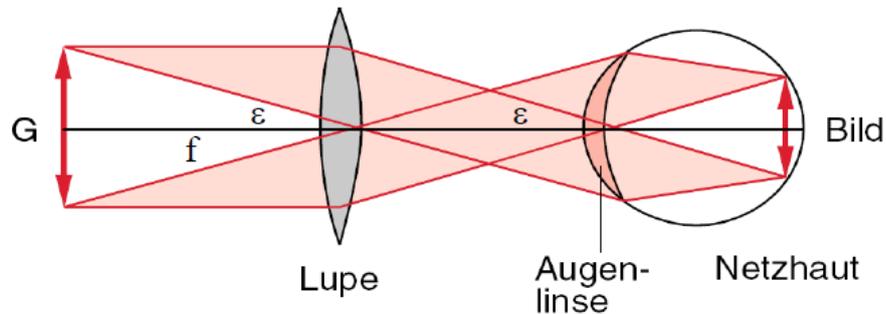


Abbildung 7: Funktionsweise einer Lupe. Vom Gegenstand G ausgesendete Strahlen treffen parallel auf die Lupe und verlassen das System durch die Augenlinse wieder parallel, was entspanntes Sehen ermöglicht.[6]

Die Vergrößerung ist definiert als der Quotient aus den unterschiedlichen Sehwinkeln  $\epsilon$  bzw.  $\epsilon_0$  entsprechend der Anordnung mit bzw. ohne Lupe. Im Rahmen der geometrischen Optik gilt für den Sehwinkel [6]:

$$\tan\left(\frac{\epsilon}{2}\right) = \frac{G}{2f} \approx \frac{\epsilon}{2} \quad (29)$$

Als Referenzabstand der Anordnung ohne Lupe wird die deutliche Sehweite  $s_0 = 25\text{cm}$  genutzt [6]. Es wird angenommen, dass bei diesem Abstand i. A. entspanntes Sehen möglich ist. Wird der Gegenstand innerhalb der Brennweite der Linse platziert, so entsteht ein größeres, virtuelles Bild, welches eine größere Vergrößerung liefert. Auch ein parabolischer/ sphärischer Spiegel weist dieses Verhalten auf. Für die Vergrößerung  $V_i$  ergibt sich jeweils [6]:

$$V_{\text{Lupe}, b=f} = \frac{\epsilon}{\epsilon_0} = \frac{s_0}{f} \leq \frac{s_0}{g} = V_{\text{Lupe}, b<f} \quad (30)$$

Der Unterschied zwischen einem reellen und virtuellen Bild ist in Abbildung 8 dargestellt.

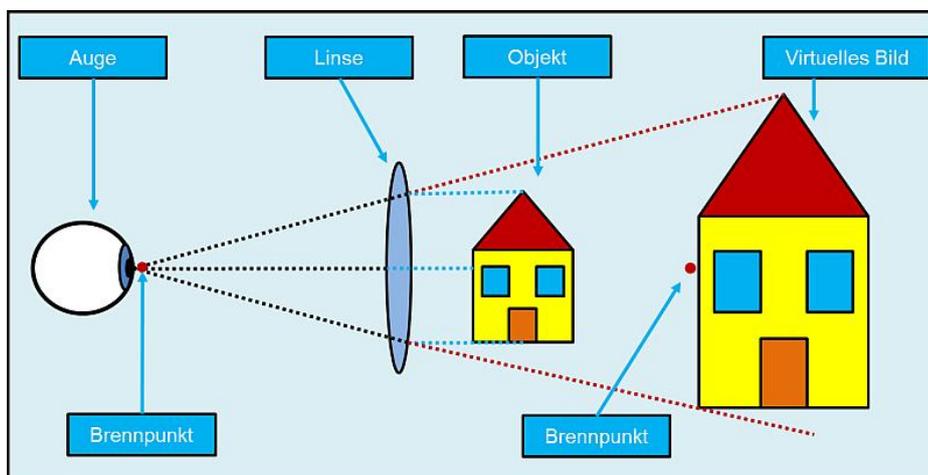


Abbildung 8: Unterschied zwischen einem reellen und virtuellen Bild. Ohne die Lupe würde das Auge nur das Haus, ein durch reale Lichtstrahlen registriertes, daher reelles Bild, wahrnehmen. Das Bild, welches das Auge mithilfe der Lupe wahrnimmt, scheint einem Ort zu entstammen, an dem kein Objekt ist. Daher ist dieses Bild virtuell. [14]

### 3.3.4 Mikroskop und Teleskop

In ihrer simpelsten Form lassen sich Mikroskop und Teleskop als ein Linsensystem zu verstehen, in dem die erste Linse ein Zwischenbild entwirft, welches von der zweiten Linse, die als Lupe fungiert, vergrößert wird. Für ein Mikroskop wird ein Gegenstand so vor einer Linse platziert, dass das entstehende Bild in der Brennebene der zweiten Linse liegt. Es entsteht ein virtuelles Zwischenbild, welches von der zweiten Linse vergrößert wird. Die Vergrößerung ist hier näherungsweise gegeben durch [6]:

$$V_{\text{Mikroskop}} = \frac{s_0}{g} \frac{f_1}{f_2} \quad (31)$$

Die Größen beziehen sich auf Abbildung 9, in welcher der schematische Aufbau eines Mikroskops zu sehen ist.

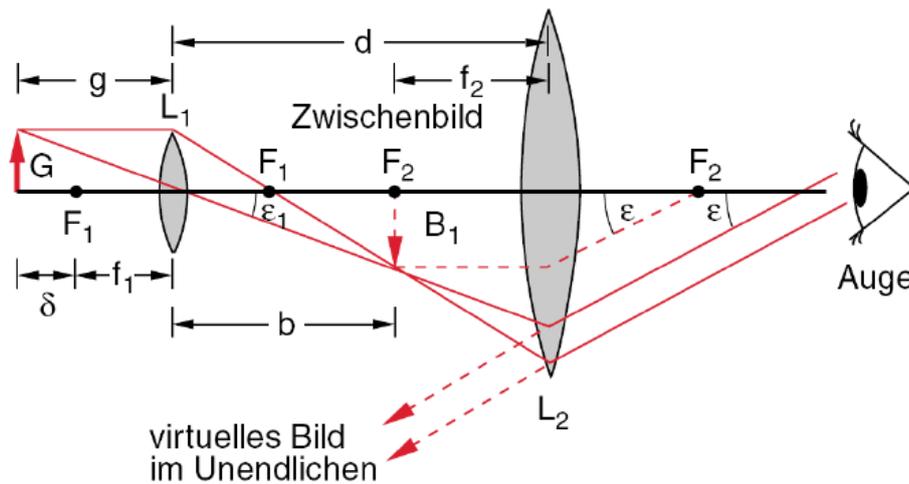


Abbildung 9: Funktionsweise eines Mikroskops. Vom Gegenstand G ausgesendete Strahlen gelangen in die erste Linse, die ein virtuelles Zwischenbild in der Brennebene der zweiten Linse entstehen lässt. Ab hier greifen die Mechanismen der Lupe. Ein realistisches Mikroskop weist eine wesentlich komplexere Struktur auf, die für eine ordentliche Belichtung und Ausgleich von Linsenfehlern sorgt. [6]

Ein Teleskop funktioniert nach einem ähnlichen Prinzip, mit dem Unterschied, dass die Gegenstandsweite mitunter astronomische Dimensionen annehmen kann. Nach Gleichung (22) entspricht dann die Brennweite der Bildweite. Hier muss der Abstand der Linsen der Summe der Brennweiten entsprechen. Im Rahmen der geometrischen Optik ist die Vergrößerung gegeben durch [6]:

$$V_{\text{Teleskop}} = \frac{f_1}{f_2} \quad (32)$$

Abbildung 10 zeigt den grundlegenden Aufbau eines Teleskops.

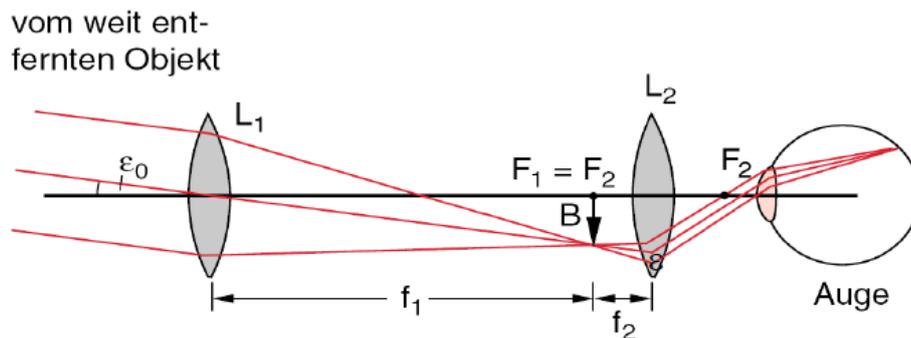


Abbildung 10: Funktionsweise eines Teleskops.  $\epsilon_0$  bezeichnet hier den Winkel, den gegenüberliegende Randpunkte des Gegenstands maximal einschließen. [6]

Es gibt noch weitere Varianten, ein Teleskop zu realisieren. Für viele Anwendungen wird eine hohe Lichtausbeute und Auflösung benötigt, die jeweils mit großen Aperturen einhergehen. Große Linsen sind schwer zu realisieren, da sie viel Raum für Fertigungsfehler bieten und dazu neigen, da sie nur am Rand befestigt werden können, unter ihrem eigenen Gewicht zusammenzubrechen. Spiegel weisen diese Probleme nicht auf und da Reflexionen nicht wellenlängenabhängig sind, wird eine zusätzliche Fehlerquelle unterdrückt. Abbildung 11 zeigt eine Übersicht von Spiegelteleskopen. Beim Hubble-Teleskop handelt es sich um eine Cassegrain-Vorrichtung.

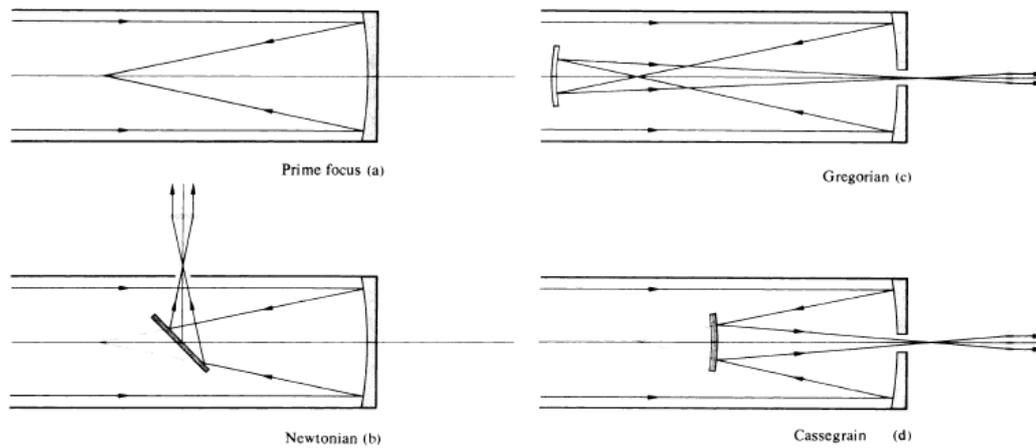


Abbildung 11: Übersicht einiger Spiegelteleskoparten. Konstruktion (a) zeigt den allen arianten zugrundeliegenden Strahlverlauf bei Spiegelung von parallel zur optischen Achse einfallenden Lichtstrahlen. Sie treffen sich im Optimalfall im Fokuspunkt des sphärischen Spiegels. Abbildungen (b) bis (d) zeigen verschiedene Realisierungen, wie ein Bild auf einen Schirm geleitet werden kann. [13, bearbeitet]

### 3.4 Matrixformalismus

Um die Beschreibung von Systemen, die aus mehreren optischen Instrumenten bestehen, zu vereinfachen, bietet es sich an, einen propagierenden Strahl durch seinen punktwweisen Abstand  $r(z)$  zur optischen/  $z$ -Achse und den mit ihr eingeschlossenen Winkel  $\alpha(z)$  zu charakterisieren [6]. Da sich die Steigung einer Funktion mit dem von der Steigungstangente eingeschlossenen Winkel zur Koordinatenachse identifizieren lässt, ist im Rahmen der geometrischen Optik die Näherung

$$\frac{d}{dz}r(z) = \tan(\alpha(z)) \approx \alpha(z) \quad (33)$$

zulässig. Betrachtet werden also Vektoren der Form

$$\vec{r}(z) = \begin{pmatrix} r(z) \\ \alpha(z) \end{pmatrix} \quad (34)$$

betrachtet. Abbildung 12 veranschaulicht das Prinzip.

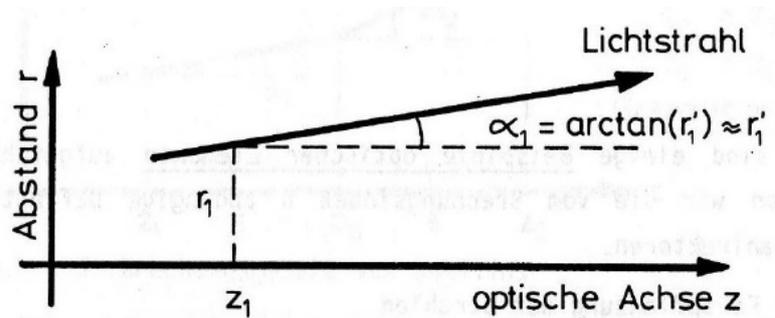


Abbildung 12: Beschreibung eines Lichtstrahls im Rahmen der geometrischen Optik. Der vom Lichtstrahl eingeschlossene Winkel mit der optischen Achse ist näherungsweise durch den Abstand zu ihr gegeben, was äquivalent zur Forderung in Gleichung (33) ist. [6]

Teile eines optischen Systems werden durch Matrizen beschrieben, sodass der Durchlauf eines Lichtstrahls durch einen Anfangsvektor und Matrixmultiplikationen beschreiben werden kann.

### 3.4.1 Freie Propagation entlang der optischen Achse

Beispielhaft soll die Herleitung der Matrix für die freie Propagation eines Lichtstrahls erläutert werden. Weitere Matrizen ergeben sich aus analogen, mitunter rechenintensiveren Überlegungen. Die Situation ist in Abbildung 13 veranschaulicht.

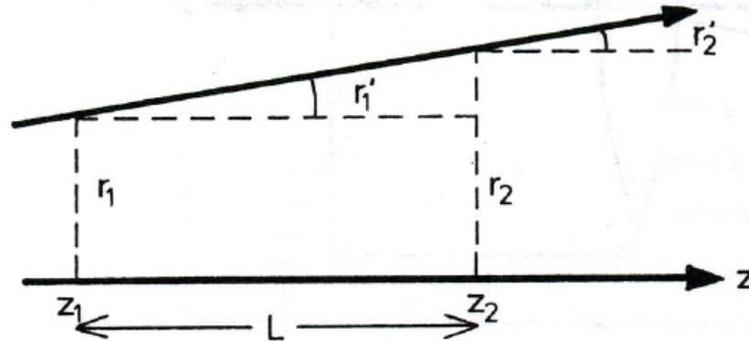


Abbildung 13: Freie Propagation eines Lichtstrahls im Rahmen der geometrischen Optik. Betrachtet werden die Abstände des Lichtstrahls zur optischen Achse an den Punkten  $z_1$  und  $z_2 = z_1 + L$ , woraus sich eine allgemeine Aussage für achsennahe Strahlen herleiten lässt. [6]

Da die Propagation nun eine lineare Abbildung ist (i. F. sei sie ihre Matrix mit " $M_{\text{Propagation}}$ " bezeichnet), lässt sich die Abbildungsmatrix aus den Bildern der Basisvektoren bestimmen.

Der erste Basisvektor ergibt sich durch einen Lichtstrahl, der den Abstand  $r(z) = 1$  zur  $z$ -Achse und eine Auslenkung  $\alpha(z) = 0$  aufweist. Für ihn ändert sich nach einer Propagation um die Strecke  $L$  weder der Abstand zur  $z$ -Achse noch der Winkel, den Strahl mit ihr einschließt. Es gilt

$$M_{\text{Propagation}} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (35)$$

Der zweite Basisvektor ergibt sich durch einen Lichtstrahl, der einen hinreichend kleinen Winkel von  $\alpha$  mit der  $z$ -Achse beim Abstand  $r(z_0) = 0$  einschließt. Der neue Abstand ist dann durch  $\alpha \approx \tan(\alpha) = \frac{r(z_0+L)}{L} \leftrightarrow r(z_0+L) = \alpha L$  bestimmt. Es gilt

$$M_{\text{Propagation}} \cdot \alpha \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} L \\ 1 \end{pmatrix} \quad (36)$$

Im Rahmen der geometrischen Optik ist dies eine lineare Abbildung, der Vorfaktor  $\alpha$  kürzt sich weg, sodass die Matrix lautet:

$$M_{\text{Propagation}} = \begin{pmatrix} 1 & L \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (37)$$

### 3.4.2 Brechung an einer Grenzfläche

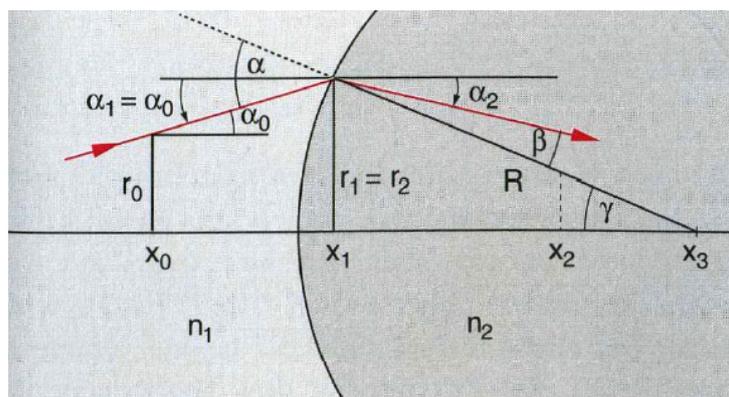


Abbildung 14: Brechung eines Lichtstrahls im Rahmen der geometrischen Optik. Das Snellius'sche Brechungsgesetz beschreibt den Lichtstrahl beim Durchgang der Grenzfläche durch die Winkel  $\alpha$  und  $\beta$ , da nur diese sich auf den Normalenvektor der Oberfläche beziehen.  $\alpha_1$  und  $\alpha_2$  beziehen sich auf die optische Achse und i. A. nicht auf die Oberfläche der Mediums. [6]

Liegt, wie in Abbildung 14 gezeigt, eine gekrümmte Grenzfläche vor, so ergibt sich mithilfe des Snellius'schen Brechungsgesetzes die Matrix [6]:

$$M_{\text{Brechung}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{n_1 - n_2}{n_2 R} & \frac{n_1}{n_2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{1}{f_{\text{Bildseitig}}} & \frac{n_1}{n_2} \end{pmatrix} \quad (38)$$

$f_{\text{Bildseitig}}$  bezeichnet hier die bildseitige Brennweite, die den Brennpunkt bestimmt, in dem parallel zur optischen Achse eintreffende Strahlen nach Brechung an der Grenzfläche fokussiert werden. Im Grenzfall  $R \rightarrow \infty$  ergibt sich die Brechung an einer ebenen Grenzfläche.

### 3.4.3 Reflexion an einem Spiegel

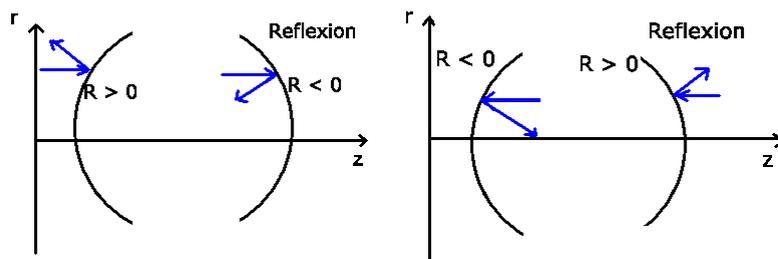


Abbildung 15: Reflexion eines Lichtstrahls an einem sphärischen Spiegel im Rahmen der geometrischen Optik. Das Vorzeichen von  $R$  richtet sich danach, ob der Lichtstrahl den Spiegel als Rand einer konvexen oder konkaven Menge sieht. Je nachdem, von welcher Seite der Lichtstrahl auf den Spiegel trifft, ändert sich dies. [15, bearbeitet]

Abbildung 15 veranschaulicht den betrachteten Fall. Der Matrixformalismus liefert für einen sphärischen Spiegel die Matrix [16]:

$$M_{\text{Spiegel, sphärisch}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{2}{R} & 1 \end{pmatrix} \quad (39)$$

Im Grenzfall  $R \rightarrow \infty$  ergibt sich die Matrix für einen ebenen Spiegel. Zu beachten ist, dass sich die Richtung der positiven Achse mit der Spiegelung umkehrt.

### 3.4.4 Brechung an einer Linse

Licht kann beim Durchgang durch eine Linse mit drei Prozessen beschrieben werden: Zunächst wird das Licht an der ersten Oberfläche gebrochen, propagiert durch das Linsenmedium und wird erneut gebrochen. Die Situation ist in Abbildung 16 dargestellt.

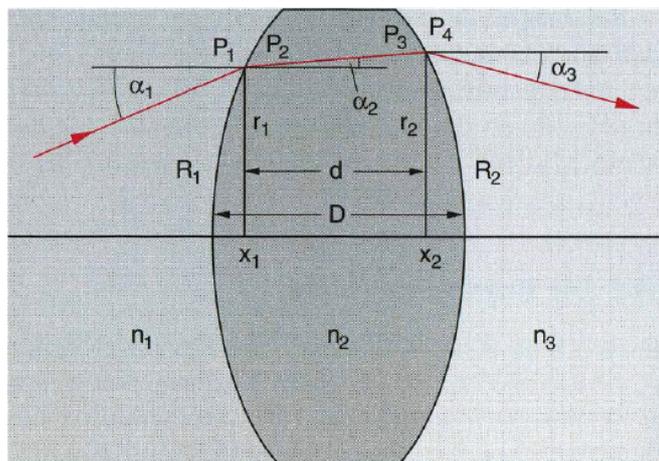


Abbildung 16: Brechung eines Lichtstrahls an einer Linse im Rahmen der geometrischen Optik. Maßgebliche Parameter ist die Entfernung  $x_1 - x_2$  zwischen Ein- und Austrittspunkt des Lichts in die Linse, die Brechungsindizes  $n_1$  bis  $n_3$  von Umgebung und Linse und die Krümmungsradien  $R_1, R_2$  der Linsenoberflächen. [6]

Anwendung der bisherigen Erkenntnisse liefert mit den Abkürzungen  $n_{ij} := n_i - n_j$  und  $x_{ij} := x_i - x_j$  die Matrix [6]:

$$M_{\text{Linse}} = M_{\text{Brechung}} \cdot M_{\text{Propagation}} \cdot M_{\text{Brechung}} = \begin{pmatrix} 1 + \frac{n_{12}x_{21}}{n_2 r_1} & \frac{n_1 x_{21}}{n_2} \\ \frac{n_{12}n_2 R_2 + n_{12}n_{23}x_{21} + n_{23}n_2 R_1}{n_2 n_3 R_1 R_2} & \frac{n_1}{n_3} \left( 1 - \frac{n_{23}x_{21}}{n_2 R_2} \right) \end{pmatrix} \quad (40)$$

Im Grenzfall  $x_{21} \rightarrow 0$  und ergibt sich für eine dünne Linse, die von einem einheitlichen Medium umgeben ist (d. h.  $n_1 = n_3$ )

$$M_{\text{Linse,dünn}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{1}{f} & 1 \end{pmatrix} \quad (41)$$

wobei  $f$  sich auf die Linsenmacher-Gleichung (Gleichung (22)) bezieht.

## 3.5 Linsenfehler

Die bisher beschriebenen Systeme sind nur als Idealisierungen zu verstehen. Für Anwendungen müssen (nur bedingt vermeidbare) Anfertigungsfehler ausgeglichen, durch die Wellennatur des Lichts bedingten Effekte und die nicht feste Grenze zur geometrischen Optik berücksichtigt werden. Eine Auswahl an relevanten Linsenfehlern aus [6] wird hier vorgestellt.

### 3.5.1 Sphärische Aberration

Durchläuft achsennahes Licht eine Linse, so stellt sich bei genauer Beobachtung heraus, dass der mithilfe der geometrischen Optik bestimmte Brennpunkt nicht exakt getroffen wird. Dies ist auf die Tatsache zurückzuführen, dass die Brennweite i. A. vom Abstand der Lichtstrahlen zur optischen Achse abhängt, siehe dazu Abbildung 17.

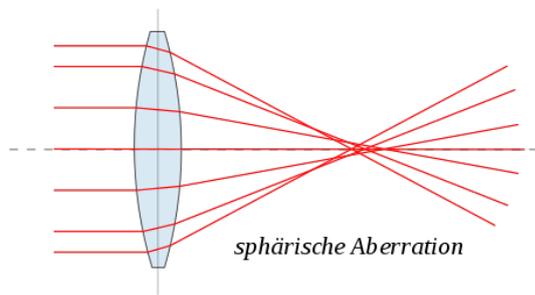


Abbildung 17: Sphärische Aberration. Achsenferne Strahlen werden durch die Linse stärker gebrochen, als achsennahe Strahlen. [17]

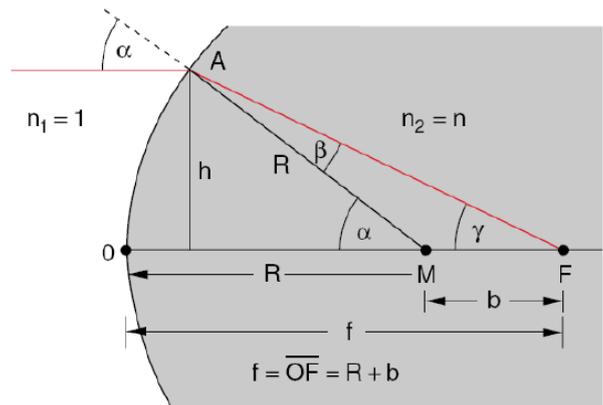


Abbildung 18: Zur Berechnung der von dem Abstand zur optischen Achse abhängigen Brennweite einer sphärischen Oberfläche. [6]

Für eine sphärische Oberfläche ergibt sich unter Ausnutzung der in Abbildung 18 skizzierten geometrischen Zusammenhänge und dem Snellius'schen Brechungsgesetz für die Brennweite  $f$  folgende Abhängigkeit des Abstands zur optischen Achse  $h$ :

$$f = R \left[ 1 + \frac{n_1}{n_2} \left( \sqrt{1 - \left( \frac{n_1 h}{n_2 R} \right)^2} - \frac{n_1}{n_2} \sqrt{1 - \left( \frac{h}{R} \right)^2} \right)^{-1} \right] \quad (42)$$

$n_1$  beschreibt den Brechungsindex des Mediums vor der Oberfläche und  $n_2$  den Brechungsindex des zur brechenden Oberfläche gehörenden Mediums, siehe auch Abbildung 18. Die Brennweite verkürzt sich also mit vergrößertem Abstand zur optischen Achse. Der Grenzwert  $\frac{h}{R} \rightarrow 0$  liefert im achsennahen Fall als bildseitige Brennweite den Eintrag unten links der Matrix aus Gleichung (38), welcher für eben diesen Fall ermittelt wurde.

### 3.5.2 Koma

Bisher betrachtete Strahlen fielen immer senkrecht zur Hauptebene einer Linse ein, was nicht immer der Fall sein muss. Anfertigungsfehler oder die Geometrie der Optik können dafür sorgen, dass statt einer (zur optischen Achse senkrechten) Hauptebene eine i. A. gekrümmte Fläche vorliegt. Die daraus resultierenden verschiedenen Brennpunkte, welche nicht zwangsläufig auf der optischen Achse liegen müssen, führen zu einer Verzerrung des Bildes. Abbildungen 19 und 20 veranschaulichen den Effekt und seine Auswirkung.

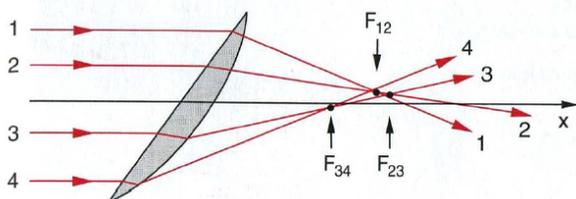


Abbildung 19: Veranschaulichung des Komas. Lichtstrahlen treffen nicht mehr senkrecht auf die Hauptebene der Linse, was zu verschiedenen Brennpunkten führt. [6]



Abbildung 20: Durch ein Lochgitter erzeugtes Bild. Durch den Effekt des Komas sind achsenferne Strahlen verzerrter, als achsennahe. [6]

---

### 3.5.3 Astigmatismus

---

Reale Objekte weisen eine Ausdehnung aus, was mit nicht nur zur optischen Achse parallelen, sondern auch mit zu ihr windschiefen Strahlen einhergeht. Für einige dieser Strahlen erscheint eine Optik (in Abbildung 21 ist dies eine Linse) von Positionen außerhalb der optischen Achse i. A. nicht symmetrisch, was zur Bildung mehrerer Brennpunkte für einen Gegenstandspunkt führt.

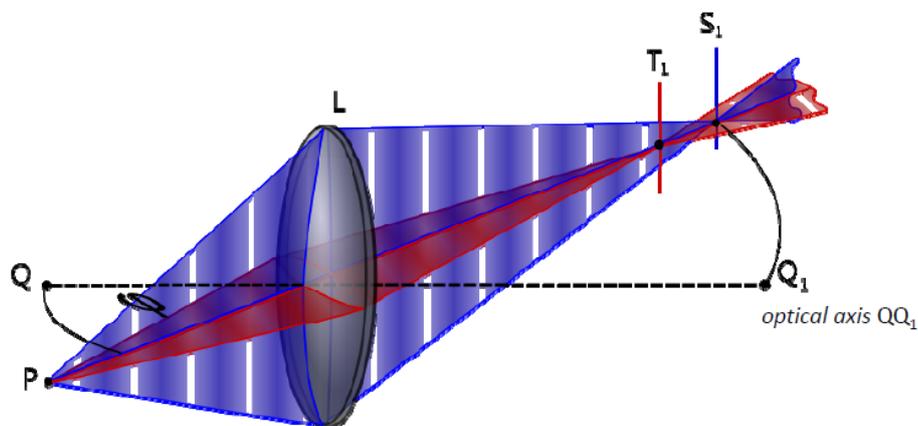


Abbildung 21: Veranschaulichung des Astigmatismus. Für einen Punkt außerhalb der optischen Achse ergeben sich zwei ausgezeichnete Ebenen: Zum einen ist dies die Tangentialebene, die von der optischen Achse und dem Strahl, der vom Objektpunkt  $P$  ausgeht und die optische Achse schneidet, aufgespannt wird. Zum anderen findet sich die Sagittalebene, die senkrecht zur Tangentialebene steht. Für Strahlen in der Tangentialebene ergibt sich eine andere Krümmung der (in diesem Fall) Linse als für Strahlen in der Sagittalebene. Es kommt zur Bildung verschiedener Fokusse, sodass ein Punkt als eine Gerade abgebildet wird. Ist das System nicht achsensymmetrisch, so ergibt sich selbst für Punkte auf der optischen Achse dieser Effekt. [6]

---

### 3.5.4 Bildfeldwölbung

---

Wegen der Abhängigkeit der Brennweite vom Achsenabstand eines Lichtstrahls und dessen Orientierung liegen die Brennpunkte einer Abbildung nicht auf einer Ebene, sondern auf einer Kugel. Abbildung 22 skizziert diesen Effekt.

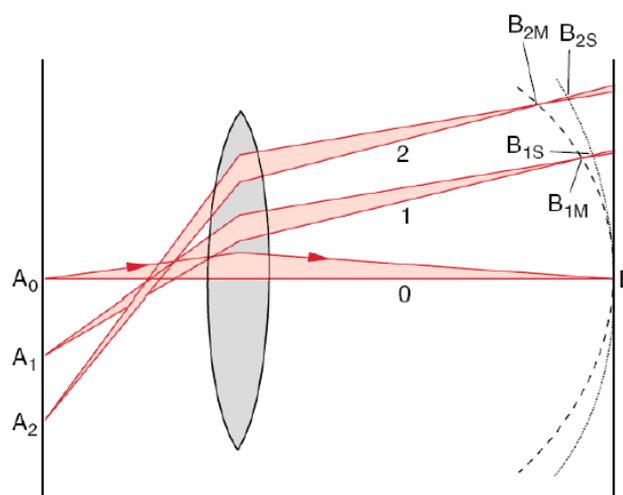


Abbildung 22: Zum Effekt der Bildfeldwölbung. Achsenferne Strahlen, die unter verschiedenen Winkeln zur optischen Achse einfallen, werden nicht mehr in eine Bildebene abgebildet. Es kommt zu einer Wölbung des Bildes. Eine Anpassung des Schirms (Veränderung des Abstands, sodass relevante Bereiche scharf abgebildet werden oder eine Krümmung des Schirms) kann diesen Effekt unterdrücken. [6]

### 3.5.5 Verzeichnung

Die vorher bestimmten Gleichungen für Vergrößerungen durch Linsensysteme berücksichtigen nicht, dass genügend große Abstände von und Winkel zur optischen Achse einen Einfluss auf die Vergrößerung haben. Es kommt zur Verzeichnung, die in Abbildung 23 gezeigt wird.



Abbildung 23: Schematische Darstellung der Verzeichnung. In optischen Systemen ist meist eine Blende verbaut, um die Lichtintensität zu kontrollieren. Ist diese vor der bildseitigen Hauptebene platziert, so kommt es zur sogenannten tonnenförmigen Verzeichnung. Für den Fall, dass die Blende hinter der bildseitigen Hauptebene liegt, kommt es zur kissenförmigen Verzeichnung. Weist das System keine Blende auf oder wurde die Blende durch geeignete Konstruktion in der Nähe der Hauptebene platziert, so tritt dieser Effekt nicht auf. [18]

### 3.5.6 Chromatische Aberration

Die bisherigen Effekte zählen zu den monochromatischen Aberrationen, da sie nicht von der betrachteten Wellenlänge abhängen. I. A. weist der Brechungsindex jedes Materials eine Abhängigkeit von der Wellenlänge auf, was auch Dispersion genannt wird. Dadurch wird Licht verschiedener Wellenlänge verschieden gebrochen. Abbildungen 24 und 25 skizzieren diesen Effekt und zeigen eine Möglichkeit auf, diesen Fehler auszugleichen.

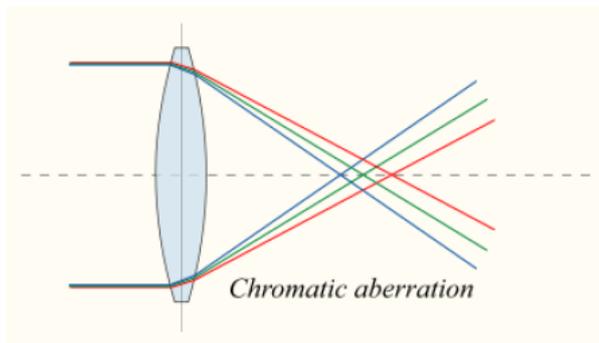


Abbildung 24: Chromatische Aberration einer Linse. Licht verschiedener Wellenlänge im gleichen Abstand zur optischen Achse wird verschieden stark gebrochen. [6]

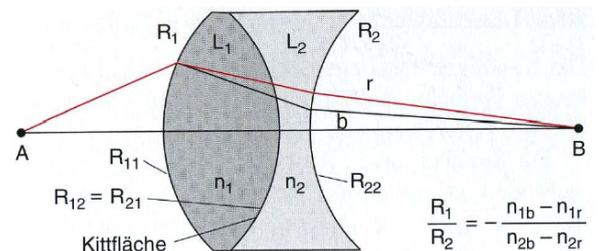


Abbildung 25: Schematischer Aufbau eines Achromaten. Diese Konstruktion aus Bikonvex- und Bikonkavlinse gleicht die chromatische Aberration für ein Paar von Wellenlängen genau aus, falls die Gleichung unten rechts für die wellenlängenabhängigen Brechungsindizes und Krümmungsradien erfüllt ist. Ein Spektrum an Wellenlängen erfährt jedoch weiterhin chromatische Aberration. Durch Hinzufügen weiterer Linsen kann dieser Effekt besser unterdrückt werden. [6]

### 3.6 Physikalische Optik

Alle bisherigen Erkenntnisse beziehen sich auf den in Kapitel 3.2 durchgeführten Grenzwert einer unendlich großen Wellenlänge für den Lösungsansatz ebener Wellen. Nun lassen sich die Maxwellgleichungen auch durch Kugelwellen lösen. Diese unterscheiden sich durch ihre Radialsymmetrie von ebenen Wellen:

Ebene Wellen :

$$\vec{A}(\vec{x}, t) = \vec{A}_0 e^{i(\vec{k} \cdot \vec{x} - \omega t)} \quad (43)$$

Kugelwellen :

$$\vec{A}(r, t) = \frac{\vec{A}_0}{r} e^{i(kr - \omega t)} \quad (44)$$

Da die Maxwell-Gleichungen zudem linear sind, sind auch beliebige Linearkombinationen dieser Ansätze wieder eine Lösung der Gleichung. Dies führt zum Huygens'schen Prinzip, welches jeden Punkt einer Wellenfront als Ausgangspunkt einer sphärischen Welle sieht, deren Überlagerung wieder einer Wellenfront bildet, von der aus sich das Prinzip fortführt [6]. Abbildung 26 veranschaulicht dieses Prinzip.

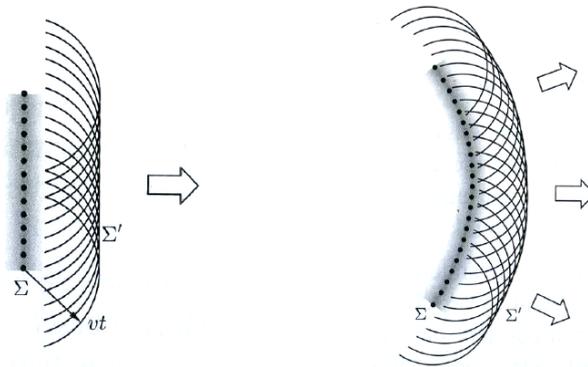


Abbildung 26: Veranschaulichung des Huygens'schen Prinzips. Jeder Punkt des grau schraffierten Bereichs markiert eine Wellenfront. Jeder dieser Punkte sendet eine sphärische Welle aus, deren Überlagerung wieder eine Wellenfront bildet. Links für eine ebene, rechts für eine Kugelwelle. [6]

Diese Überlagerung von Licht wird auch Interferenz genannt. Sie kann konstruktiv und destruktiv sein, was z. B. beim Young'schen Doppelspaltexperiment das entstehende Intensitätsmuster erklärt. Weiterhin lassen sich durch diesen Effekt Interferometer und Anti-Reflex-Beschichtungen konstruieren [6]. Diese Effekte machen bereits von der Wellennatur des Lichts Gebrauch, nutzen z. B. Phasenbeziehungen (Kohärenz, Gangunterschied) oder die zeitliche Änderung von Amplituden (konstruktive und destruktive Interferenz) aus, lassen sich aber noch gut mit Mitteln der geometrischen Optik beschreiben.

Nähert sich die Größenordnung der Apertur, durch die das Licht propagiert, der Wellenlänge des Lichts an, so kommt es zur Beugung. Dabei wird Licht an den Rändern der betreffenden Apertur so beeinflusst, dass es in Raumbereiche gelangt, die es nach der geometrischen Optik nicht erreichen dürfte. Grundlage zur Beschreibung dieser Phänomene ist das Beugungsintegral nach Fresnel-Kirchhoff/Huygens (für den Betrag des elektrischen Feldes von monochromatischem Licht der Wellenlänge  $\lambda$  formuliert) [6]:

$$E(x, y, z) = \frac{i}{\lambda} \int_A E_0(x_0, y_0, z_0) \frac{e^{ik|\vec{r} - \vec{r}_0|}}{|\vec{r} - \vec{r}_0|} dx_0 dy_0 \quad (45)$$

$E_0$  beschreibt das elektrische Feld der Lichtquelle,  $E$  das an der Apertur mit Öffnung  $A$  gebeugte Feld.  $\vec{r} = (x, y, z)$  bezeichnet einen Punkt hinter,  $\vec{r}_0 = (x_0, y_0, z_0)$  einen Punkt in der Öffnung. Die Darstellungen für Gleichung (45) sind nicht einheitlich und können variieren.

Dieses Integral ist in den meisten Fällen nur numerisch zu lösen. Es lassen sich zwei Näherungen angeben, die öfters analytische Lösungen zulassen. Zum einen ist dies die Nahfeld-Näherung für achsennahe Strahlen, zum anderen die Fernfeld-Näherung für einen von der Apertur weit entfernten Schirm. Im letzten Fall wird aus dem Beugungsintegral die Fouriertransformation des elektrischen Feldes am Ort der beugenden Apertur. So ergeben sich für den Fall einer

ebenen Welle für eine quadratische und eine kreisförmige Öffnung folgende Proportionalitäten der transmittierten elektrischen Felder [6]:

$$E_0 \xrightarrow{\text{quadratische Blende}} \sim E_0 \frac{\sin(\alpha x)}{\alpha x} \quad (46)$$

$$E_0 \xrightarrow{\text{kreisförmige Blende}} \sim E_0 \frac{J_1(\alpha' x)}{\alpha' x} \quad (47)$$

$\alpha$ ,  $\alpha'$  beschreiben jeweils einen durch die Fourier-Transformation und die Symmetrie der Apertur bestimmten Faktor, bei  $J_1$  handelt es sich um die Besselfunktion erster Ordnung. Aus der Lage des ersten Minimums des exakten Ausdrucks für Gleichung (47) formulierte Rayleigh eine (willkürlich gewählte, aber oft genutzte) Gleichung zur Bestimmung des minimal auflösbaren Winkelabstands [6]:

$$\sin(\Theta) = 1,22 \frac{\lambda}{D} \quad (48)$$

$\Theta$  bezeichnet den Öffnungswinkel zweier aufzulösenden Objektpunkte,  $\lambda$  die Wellenlänge des von den Punkten emittierten Lichts und  $D$  den Durchmesser (oder eine andere für die Dimensionierung repräsentative Größe) der beugenden Apertur. Diese Gleichung ist äquivalent dazu, dass das erste Beugungsminimum der jeweiligen Intensitätsverteilung eines Punktes mit dem Maximum des anderen zusammenfällt. Beugungseffekte können also durch Vergrößerung der beugenden Apertur verkleinert werden, was in der Anwendung aber nicht immer möglich ist.

---

### 3.7 Kenngrößen von optischen Systemen

---

Mit den geschaffenen Grundlagen können nun einige charakteristische Größen von optischen Systemen formuliert werden.

---

#### 3.7.1 Effektive Brennweite

---

Gleichung (27) zeigt, dass sich eine effektive/Gesamtbrennweite für eine Linsensystem aufstellen lässt. Iteration der Gleichung liefert die effektive Brennweite für mehr als zwei Linsen. Analog lassen sich Gleichungen auch für Systeme, die aus anderen Bestandteilen oder Mischungen bestehen, formulieren.

---

#### 3.7.2 Blendenzahl

---

Durch die Blendenzahl ist ein Maß gegeben, wie viel Licht die Eintrittslinse eines optischen Systems zum Objektiv gelangen lässt. Sie ist definiert durch [19]:

$$k_{\text{Blende}} = \frac{f}{D} \quad (49)$$

Hierbei bezeichnet  $f$  die Brennweite des Objektivs und  $D$  den Durchmesser der Eintrittslinse.

---

#### 3.7.3 Wellenfrontfehler

---

Die bereits erwähnten Aberrationen wurden eher qualitativ diskutiert. Formalisiert werden diese Phänomene durch folgende Überlegung: Ein Objektpunkt sendet Kugelwellen aus, die im Fall, dass keine Abbildungsfehler vorliegen, wieder als Kugelwelle beim Bildpunkt ankommt. Reale Systeme weisen immer Abbildungsfehler auf, es wird beim Bildpunkt keine perfekte Kugelwelle mehr ankommen. Die Differenz zwischen erwarteter perfekter Kugelwelle und tatsächlich vorliegender Form wird als Aberration  $W$  bezeichnet (siehe dazu auch Abbildung 27), die als Potenzreihe entwickelt werden kann. I. A. werden für eine vollständige Beschreibung sowohl die Koordinaten der Objekt- als auch der Bildebene gebraucht, was vier Koordinaten ( $\vec{r}_{\text{Obj.}} = (x_{\text{Obj.}}, y_{\text{Obj.}})$ ,  $\vec{r}_{\text{Bild}} = (x_{\text{Bild}}, y_{\text{Bild}})$ ) bedeutet [20]. Diese sind in Abbildung 28 skizziert.

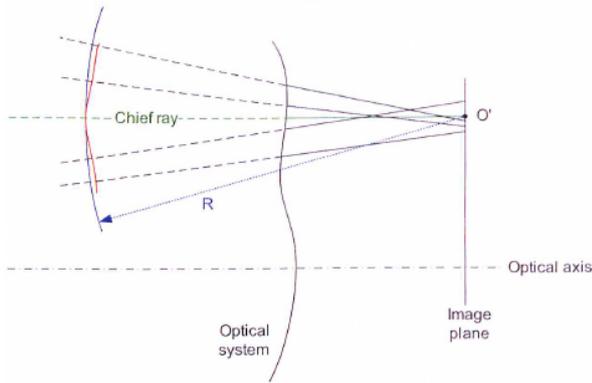


Abbildung 27: Zur Definition der Aberration  $W$ . Wird von einem Objektpunkt eine Kugelwelle ausgesendet, so sollte im Idealfall eine Kugelwelle beim Bildpunkt ankommen. Diese ist in blau eingezeichnet. Da ein optisches System niemals eine optimale Abbildung ermöglicht, hat die ankommende Welle eine andere Form, die in rot eingezeichnet ist. Die Differenz der beiden Wellen wird als Aberration  $W$  definiert. [9]

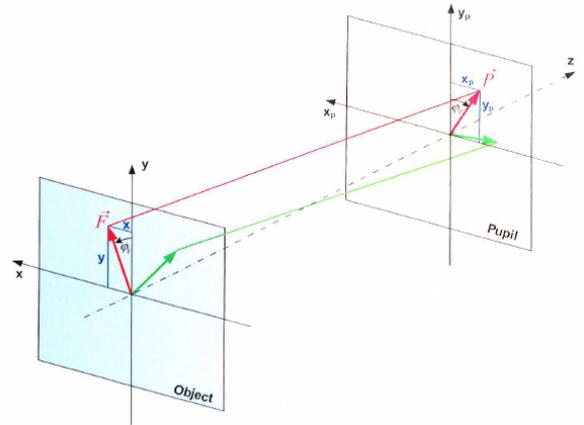


Abbildung 28: Zur Wahl der Koordinaten der Aberration. Ein Lichtstrahl wird durch den Objektpunkt, bei dem er startet, und den Bildpunkt, bei dem er ankommt, beschrieben. Zwischen den beiden Ebenen befindet sich das optische System. [9]

Mit dem maximalen Abstand eines Objektpunktes von der optischen Achse als  $h_{\max}$  und dem maximalen Abstand eines Bildpunktes von der optischen Achse  $r_{\max}$  (auch Pupillenkoordinate genannt) können diese Vektoren jeweils normiert werden zu  $\eta = \frac{\vec{r}_{\text{Obj.}}}{h_{\max}}$  und  $\rho = \frac{\vec{r}_{\text{Bild}}}{r_{\max}}$ . Mit dem von  $\vec{r}_{\text{Obj.}}$  und  $\vec{r}_{\text{Bild}}$  eingeschlossenen Winkel  $\theta$  kann  $W$  als folgende Potenzreihe entwickelt werden [5]:

$$W(\eta, \rho, \theta) = \sum_{ijk} W_{ijk} \eta^i \rho^j (\cos(\theta))^k \quad (50)$$

Dabei gilt  $k \leq j$  und  $i + j, j + k$  sind natürliche, gerade Zahlen. Für einige Entwicklungskoeffizienten lassen sich einige der bereits beschriebenen Aberrationen zuordnen.

Tabelle 1: Auflistung einiger Entwicklungskoeffizienten der Aberrationsentwicklung  $W$  und ihre Bedeutungen

Koeffizient	Name	Bedeutung
$W_{000}$	Hub	Konstante additive Phase, hat keinen messbaren Einfluss
$W_{111}$	Verkippung	Verkippung der Bildebene, keine Auswirkung auf Bildqualität
$W_{020}$	Fokus	Verschiebung der Bildebene, kann trivial ausgeglichen werden
$W_{040}$	Sphärische Aberration	Änderung des Fokus mit Pupillenkoordinate $\rho$
$W_{131}$	Koma	Änderung der Verkippung mit Pupillenkoordinate $\rho$
$W_{220}$	Bildfeldwölbung	Änderung des Fokus mit Objektcoordinate $\eta$
$W_{311}$	Verzeichnung	Änderung der Verkippung mit Objektcoordinate $\eta$
$W_{222}$	Astigmatismus	Änderung der Bildfeldwölbung mit Pupillenorientierung $\theta$

Durch Anpassung des betrachteten optischen Systems und neuer Auswertung der Koeffizienten lassen sich Aberrationen systematisch behandeln.

### 3.7.4 Modulationsübertragungsfunktion

Als weiteres Maß zur Beurteilung eines entstehenden Bildes bietet es sich an, die Kontraste von Bild  $m_{\text{Bild}}$  und Objekt  $m_{\text{Objekt}}$  zu vergleichen. Die über das Verhältnis dieser beiden Kontraste definierte Modulationsübertragungsfunktion [21]

$$\text{MTF}(\nu_x, \nu_y) = \frac{m_{\text{Bild}}}{m_{\text{Objekt}}} \quad (51)$$

gibt Auskunft darüber, wie gut der ursprüngliche Kontrast des Objektes (beeinflusst etwa durch die Ausleuchtung) durch die Abbildung des optischen Systems erhalten bleibt.  $\nu_x, \nu_y$  sind die Raumfrequenzen des Objektes. Sie wird üblicherweise über der Raumfrequenz aufgetragen, d. h., über dem Inversen der Objektbreite. Je größer die Raumfrequenz, desto kleiner sind die Abstände zwischen zwei Objektpunkten. Je näher diese aneinander kommen, desto mehr Beugungserscheinungen kommen vor, sodass der ideale Verlauf einer MTF durch diese Effekte begrenzt ist. Abbildungen 29 und 30 zeigen den Unterschied zwischen Objekt- und Bildkontrast auf und vergleichen eine ideale und eines realen Systems entstammende MTF.



Abbildung 29: Zur Unterscheidung von Objekt- und Bildkontrast. Hier werden die Kontraste durch immer engere Gitter, deren Muster durch eine Linse abgebildet wird, untersucht. Je kleiner der Gitterabstand ist, desto schlechter ist aufgrund von Beugungseffekten der Bildkontrast und desto größer ist die Raumfrequenz. [22]

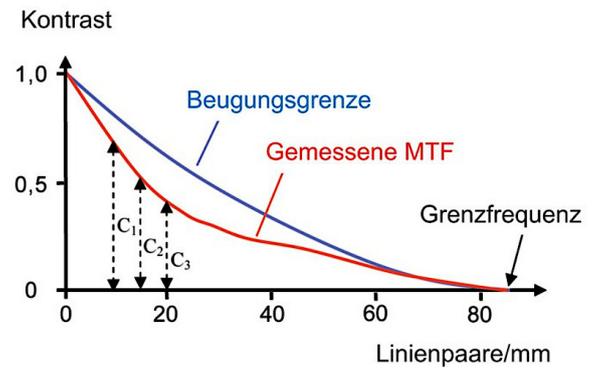


Abbildung 30: Vergleich von beugungsbegrenzter und an einem realen System bestimmter MTF. Mit zunehmender Raumfrequenz nimmt die MTF entlang der blauen Kurve ab. Die niedrigeren Werte entlang der roten Kurve sind auf die Einstellung des Systems zurückzuführen. Die gestichelten Pfeile beziehen sich auf Abbildung 29. [22]

#### 4 Hubble-Teleskop

Für das in diesem Versuch untersuchte Hubble-Teleskop können nun einige Vorbereitungen für die Optimierung getroffen werden. Sind Parameter des Teleskops bekannt, so können mithilfe des Matrix-Formalismus leicht Gleichungen aufgestellt werden, die nach Unbekannten aufgelöst werden können. Der schematische Aufbau und einige Strahlengänge sind in Abbildung 31 skizziert.

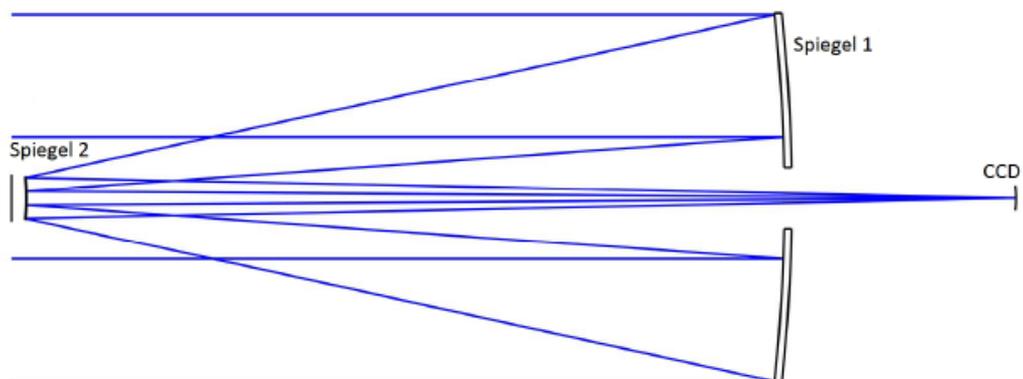


Abbildung 31: Schematischer Aufbau des Hubble-Teleskops. Es besteht aus zwei sphärischen Spiegeln, wobei Spiegel 1 ein Loch aufweist, um ein Bild auf dem CCD-Sensor aufnehmen zu können. [11]

Sobald ein Lichtstrahl auf Spiegel 1 trifft, wird dieser an ihm reflektiert ( $M_{\text{Ref},1}$ ). Anschließend propagiert der Strahl zu Spiegel 2 ( $M_{\text{Prop},1}$ ), wobei der z-Anteil der Strecke durch den Spiegelabstand  $L_1$  gegeben ist. An Spiegel 2 wird er

erneut reflektiert ( $M_{\text{Ref},2}$ ) und propagiert zum CCD-Sensor ( $M_{\text{Prop},2}$ ), der sich in einer Entfernung  $L_2$  von Spiegel 2 befindet. Damit ergibt sich für das Hubble-Teleskop die Gesamtmatrix

$$M_{\text{Hubble}} = M_{\text{Prop},2} \cdot M_{\text{Ref},2} \cdot M_{\text{Prop},1} \cdot M_{\text{Ref},1} = \begin{pmatrix} 1 - 2\left(\frac{L_1}{R_1} + \frac{L_2}{R_1} + \frac{L_2}{R_2}\right) + \frac{4L_1L_2}{R_1R_2} & L_1 + L_2 - \frac{2L_1L_2}{R_2} \\ -2\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right) + \frac{4L_1}{R_1R_2} & 1 - \frac{2L_1}{R_2} \end{pmatrix} \quad (52)$$

Bekannte Parameter sind der Durchmesser von Spiegel 1  $D_1 = 2,4\text{m}$  und Spiegel 2  $D_2 = 0,28\text{m}$  und der Abstand von Spiegel 2 zum CCD-Sensor  $L_2 = 6,4\text{m}$ . Die optischen Eigenschaften des Systems werden für die Wellenlänge  $\lambda = 477,5\text{nm}$  untersucht. Weiterhin sind drei Randbedingungen gegeben:

1. Strahlen, die parallel auf Spiegel 1 treffen, sollen so durch Spiegel 1 und Spiegel 2 reflektiert werden, dass der Lichtstrahl auf dem Schnittpunkt von optischer Achse und CCD-Sensor aufkommt. D. h.:

$$M_{\text{Hubble}} \cdot \begin{pmatrix} r \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \alpha \end{pmatrix} \quad (53)$$

2. Strahlen, die den Rand von Spiegel 1 unter einem maximalen Winkel  $\alpha_{\text{krit}} = 0,08^\circ \cdot \frac{\pi}{180^\circ}$  zur optischen Achse treffen, sollen auf den Rand von Spiegel 2 reflektiert werden, also:

$$M_{\text{Prop},1} \cdot M_{\text{Ref},1} \cdot \begin{pmatrix} \frac{D_1}{2} \\ \alpha_{\text{krit}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{D_2}{2} \\ \alpha' \end{pmatrix} \quad (54)$$

3. Obwohl bisher nur geometrische Optik zum Tragen kam, dürfen Beugungseffekte nicht übersehen werden. Je kleiner die Apertur ist, desto größer ist der maximal auflösbare Winkelunterschied zweier Intensitätsmaxima. Mit dem kleineren Spiegel 2 kann ein größter auflösbarer Winkel bestimmt werden. Da aber vorher schon Beugung an Spiegel 1 stattfindet und diese berücksichtigt werden müsste, wird nur dessen Einfluss für folgende Betrachtungen herangezogen. Der Winkel ergibt sich zu  $\alpha_{\text{min}} = \arcsin(1,22 \frac{\lambda}{D_1}) \approx 2,42 \cdot 10^{-7}$  (Winkel in Radiant). Für zwei Strahlen, die auf Spiegel 1 treffen, wobei der eine parallel zur optischen Achse und der andere mit  $\alpha_{\text{min}}$  auftreffen soll, soll gelten, dass sie vom CCD-Sensor gerade noch unterschieden werden können sollen. Der Abstand ihrer Auftreffpunkte muss dann dem Abstand zweier Pixel des Sensors entsprechen, der durch  $d_{\text{CCD}} = 14\mu\text{m}$  gegeben ist. Der Matrixformalismus liefert:

$$M_{\text{Hubble}} \cdot \begin{pmatrix} r_1 \\ 0 \end{pmatrix} - M_{\text{Hubble}} \cdot \begin{pmatrix} r_2 \\ \alpha_{\text{min}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d_{\text{CCD}} \\ \alpha'' \end{pmatrix} \quad (55)$$

## 5 Versuchsdurchführung und Auswertung

### 5.1 Vorbereitung der Arbeitsumgebung

Um das Programm Zemax für diesen Versuch zu benutzen wurde eine Arbeitsumgebung angelegt und entsprechend vorbereitet. Hierzu wurde die Wellenlänge des Lichtes was für die Untersuchung verschiedener Systeme genutzt werden soll auf  $587,56\text{ nm}$  gestellt, die Öffnung der Eintrittspupille auf  $2\text{ cm}$  und die Einfallswinkel der Strahlen auf  $0^\circ$  sowie  $10^\circ$ .

### 5.2 Einzelne Sammellinse

In der Arbeitsumgebung wurde eine paraxiale Bikonvexlinse mit einer Brennweite von  $10\text{ cm}$  konstruiert ebenso wurde die Dicke auf  $0\text{ cm}$  gesetzt. Das hierbei betrachtete System wurde mit den in Zemax integrierten Analysewerkzeugen auf seine Eigenschaft hin untersucht. Es zeigt sich ein optimales Verhalten bei dem keine Abbildungsfehler auftreten. Ein solches System fokussiert bei beliebigen Einfallswinkeln beliebig genau, da hier nur die paraxiale Näherung betrachtet wird, solche Systeme sind nicht existent und können somit kein reales bezeichnen. Somit sind die Seidel Koeffizienten alle gleich  $0$ .

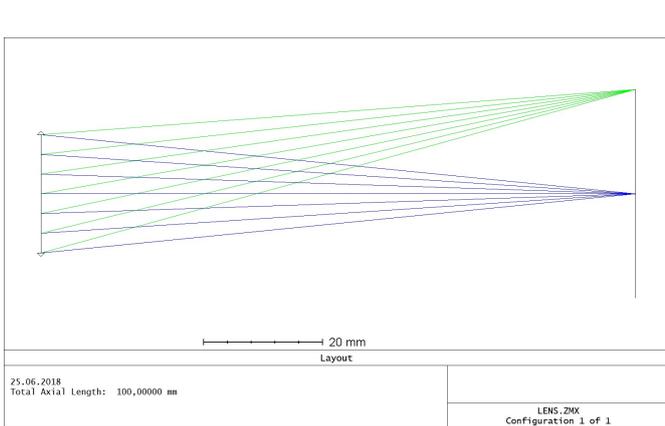


Abbildung 32: Ideale Linse mit einer Brennweite von 10 cm die blauen Strahlen laufen parallel zur Optischen Achse die grünen 10° geneigt zu dieser.

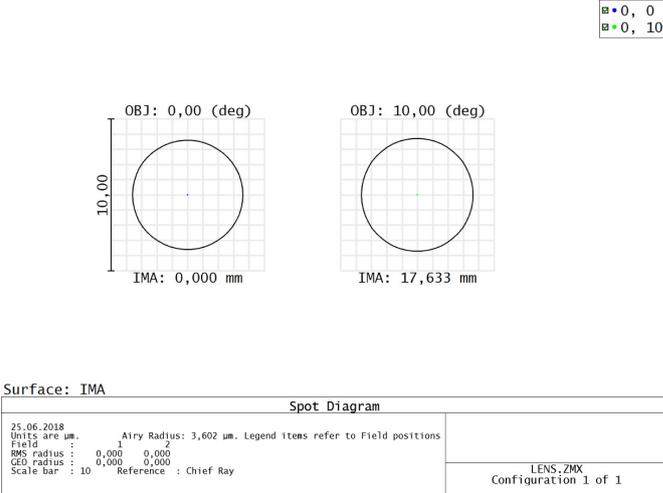


Abbildung 33: Spotdiagramm einer idealen Linse mit einer Brennweite von 10 cm.

Dieses System diente zur Einfeldung in die Softwareumgebung von Zemax, im folgenden werden die in den Vorbereitungsaufgaben berechneten Systeme konstruiert.

### 5.3 Singlett

Die in der Vorbereitung von H1 berechnete Linse wurde konstruiert. Hierzu wurde eine weitere Ebene erstellt mit dem berechneten Krümmungsradius von 5,168 cm, bei einem Brechungsindex von 1,5168. Die Dicke der Linse betrug hierbei 1,5 mm, die Bildweite 10 cm. Dem Folgend fand eine Analyse diese Systems statt. Das System ist dabei wie nachfolgend zu charakterisieren.

Surf	Type	Radius	Thickness	Glass	Clear Diam	Chip Zone	Mech Diam	Conic
OBJ	STANDARD	Infinity	Infinity		0	0	0	0
STO	STANDARD	51,68	1,5	N-BK7	20,35697	0	20,40016	0
2	STANDARD	Infinity	100		20,40016	0	20,40016	0
IMA	STANDARD	Infinity			37,06533	0	37,06533	0

Tabelle 2: Charakterisierung des Systems der plankonvexen Linse aus H1 Längenangaben in mm

Das System sowie die Strahlverläufe und Analysebilder sind im folgenden Abbildungen zu entnehmen.

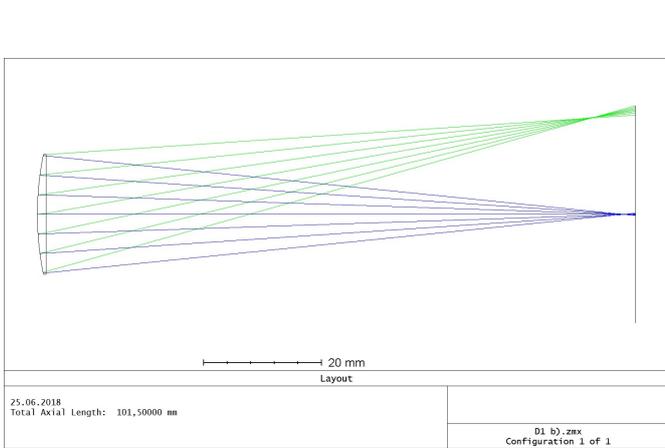


Abbildung 34: Strahlverlauf der in H1 berechneten plankonvexen Linse

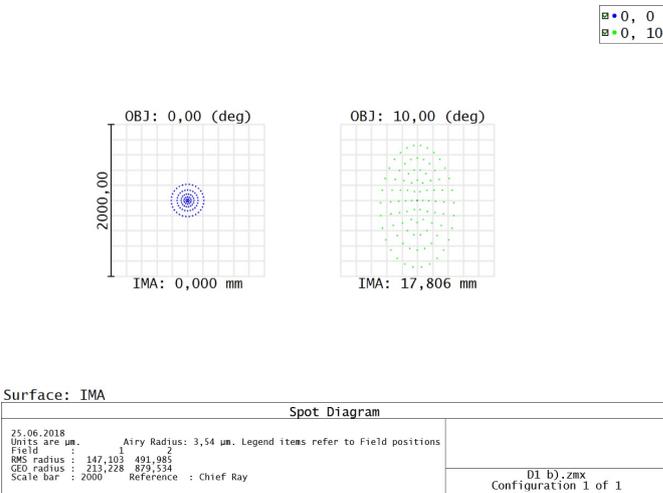


Abbildung 35: Spotdiagramm der in H1 berechneten plankonvexen Linse

Es lässt sich gut erkennen, dass die paraxialen Strahlen kurz vor der Betrachtungsebene fokussiert werden, der Fehler entsteht durch die physikalische Ausdehnung der Linse. Die Strahlen die in 10° Winkel auftreffen werden hierbei weit vor dem Schirm fokussiert. Es würde dem entsprechend eine Bildfeldwölbung zu erwarten sein. Außerdem zeigt das Spotdiagramm, das die Abbildung der Strahlen auf die Querschnittsbildebene nur eine geringe Auflösung zulassen, da die Größe der Spotsradien weit über den Airy-Radius hinaus gehen.

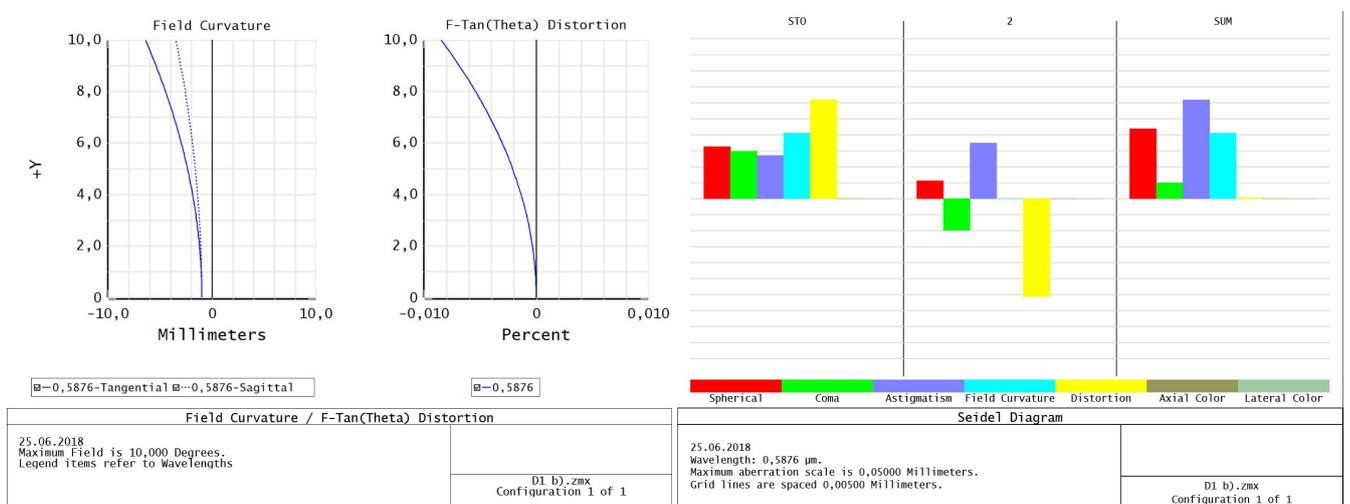
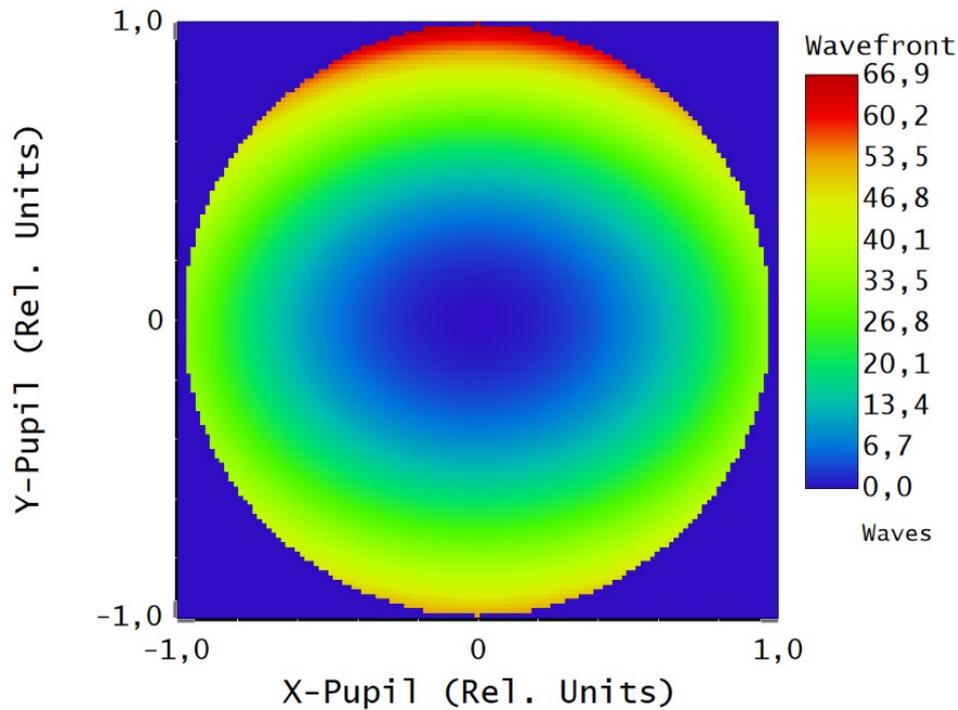


Abbildung 36: Bildfeldwölbung der in H1 berechneten plan-konvexen Linse  
Abbildung 37: Auftretende Linsenfehler der in H1 berechneten plankonvexen Linse

Ebenso lässt sich die erwartete Bildfeldwölbung darstellen. Hierbei ist sowohl in der Sagittal- als auch der Tangentialebene der Fokuspunkt vor der Betrachtungsebene und dabei vom Abstand abhängig gekrümmt. In der nebenstehenden Abbildung sind außerdem die auftretenden Bildfehler nach jeder Ebene zu sehen. Dabei ist die Summe die für uns relevante Betrachtung. Dieses System wird somit durch im wesentlichen drei Fehler bestimmt, Astigmatismus schiefer Bündel, sphärischer Aberration und Bildfeldwölbung. Koma tritt ebenfalls auf wird durch die anderen Fehler überwogen. Auch wurde der Wellenfrontfehler für einen Einfallswinkel von 10° betrachtet. Dieser wird von Zemax in Einheiten der Wellenlänge angegeben.



Wavefront Function	
25.06.2018 0,5876 $\mu\text{m}$ at 10,00 (deg) Peak to valley = 66,9109 waves, RMS = 14,7905 waves. Surface: Image Exit Pupil Diameter: 2,0000E+01 Millimeters	D1 b).zmx Configuration 1 of 1

Abbildung 38: Wellenfrontfehler als Heatmap in Einheiten der Wellenlänge bei einem Einfallswinkel von  $10^\circ$

Ebenso wurde die Bikonvexlinse aus H1 konstruiert durch folgende Ebenencharakterisierung, bei gleichen Grundeinstellungen.

Surf	Type	Radius	Thickness	Glass	Clear Diam	Chip Zone	Mech Diam	Conic
OBJ	STANDARD	Infinity	Infinity		0	0	0	0
STO	STANDARD	103,36	1,5	N-BK7	20,17399	0	20,25615	0
2	STANDARD	-103,36	100		20,25615	0	20,25615	0
IMA	STANDARD	Infinity			37,76621	0	37,76621	0

Tabelle 3: Charakterisierung des Systems der bikonvexen Linse aus H1 Längenangaben in mm

Das System sowie die Strahlverläufe und Analysebilder sind im folgenden Abbildungen zu entnehmen.

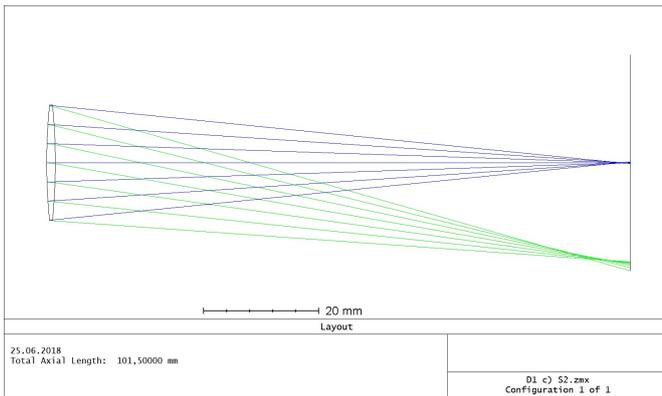


Abbildung 39: Strahlverlauf der in H1 berechneten bikonvexen Linse

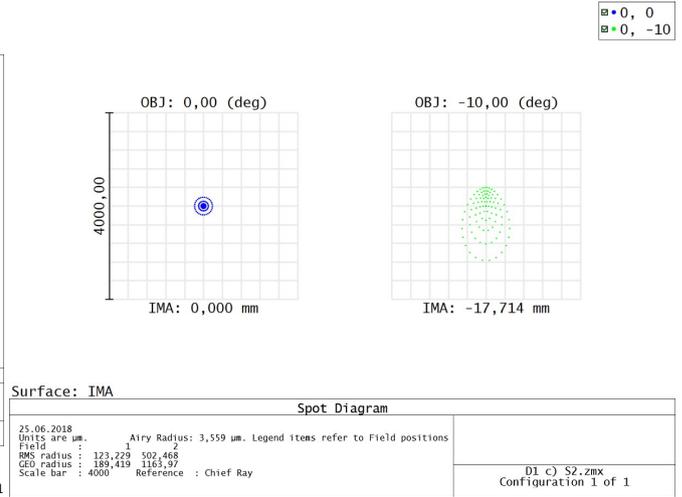


Abbildung 40: Spotdiagramm der in H1 berechneten bikonvexen Linse

Auch hier lässt sich gut erkennen das Bildfeldwölbung Auftritt. Ebenso wird aufgrund der Dicke nicht genau auf die Bildebene fokussiert. Die Spotdiagramme zeigen auch, dass die RMS-Radien weit über den Airy-Radius hinaus gehen, was eine Unterscheidung naher Punkte unmöglich macht. Somit ist dieser auf nicht durch Beugungseffekte beschränkt.

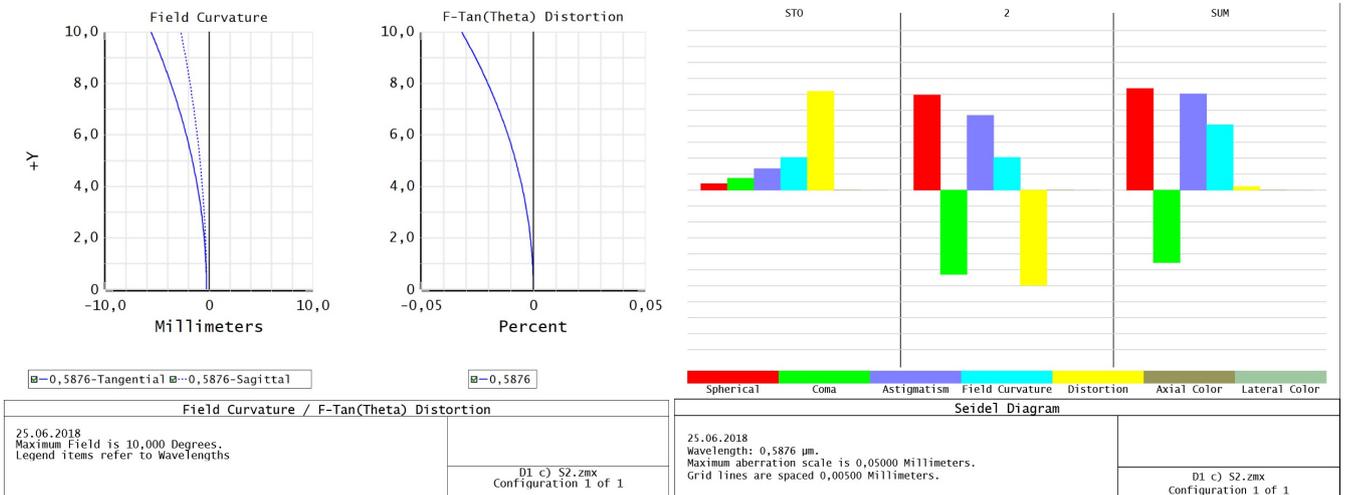
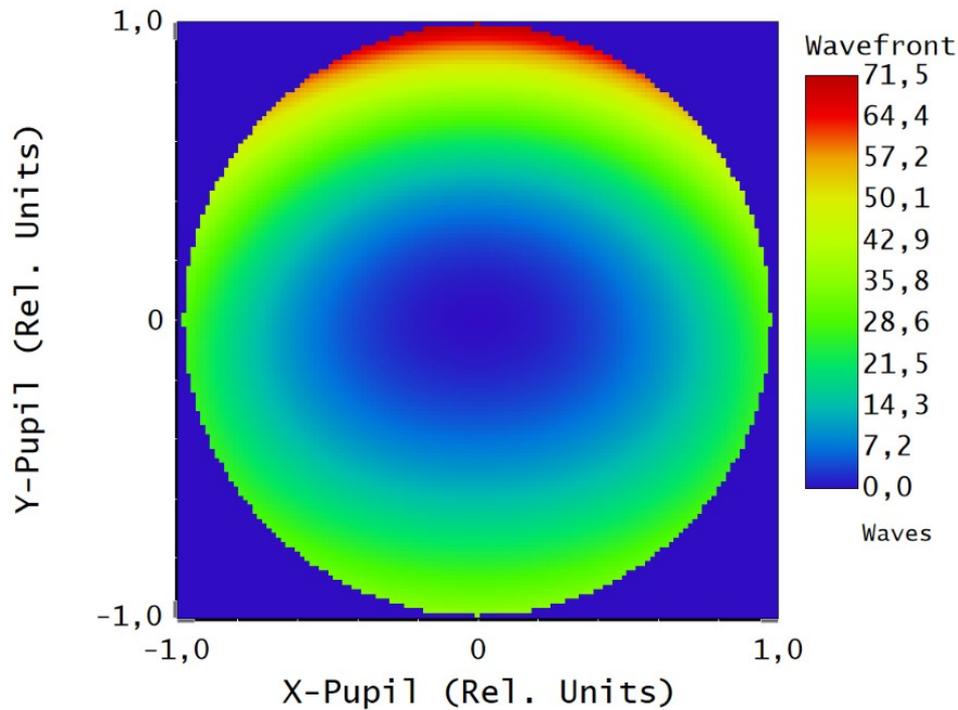


Abbildung 41: Bildfeldwölbung der in H1 berechneten bikonvexen Linse

Abbildung 42: Auftretende Linsenfehler der in H1 berechneten bikonvexen Linse

Auch hier lässt sich die Bildfeldwölbung in einer gesonderten Abbildung gut veranschaulichen. Die Seidel Koeffizienten bestätigen dies. Es ist zu sehen, dass auch hier sphärische Aberration, Astigmatismus schiefer Bündel und Bildfeldwölbung am stärksten auftreten, darüber hinaus ist das Koma sehr stark vorhanden, dies könnte an der höheren Divergenz der Strahlen liegen, da diese in der Dickeren Linse weiter propagieren. Ebenso wurde die Wellenfront für die unter  $10^\circ$  einfallenden Strahlen betrachtet.



Wavefront Function	
25.06.2018 0,5876 $\mu\text{m}$ at -10,00 (deg) Peak to valley = 71,5500 waves, RMS = 14,4884 waves. Surface: Image Exit Pupil Diameter: 2,0099E+01 Millimeters	D1 c) S2.zmx Configuration 1 of 1

Abbildung 43: Wellenfrontfehler als Heatmap in Einheiten der Wellenlänge bei einem Einfallswinkel von  $10^\circ$  der bikonvexlinse

#### 5.4 Optimierung des Singlett Systems

Das Bikonvexlinsensystem soll nun durch Variation angegebener Parameter so optimiert werden, dass die Abbildungsfehler minimiert werden. Es sollen die beiden Krümmungsradien, Dicke und Bildweite variiert werden. Wobei die Gesamtbrennweite erhalten bleiben soll. Ebenfalls sollte die Dicke nicht 3 cm überschreiten. Die Charakterisierung des optimierten Systems ergibt sich wie nachfolgend.

Surf	Type	Radius	Thickness	Glass	Clear Diam	Chip Zone	Mech Diam	Conic
OBJ	STANDARD	Infinity	Infinity		0	0	0	0
STO	STANDARD	222,4166	30,00089	N-BK7	20,07995	0	25,7369	0
2	STANDARD	-64,22893	92,53652		25,7369	0	25,7369	0
IMA	STANDARD	Infinity			35,32309	0	35,32309	0

Tabelle 4: Charakterisierung des Systems der optimierten Bikonvexlinse

Es ergab sich folgendes System mit entsprechenden Spot-Diagrammen.

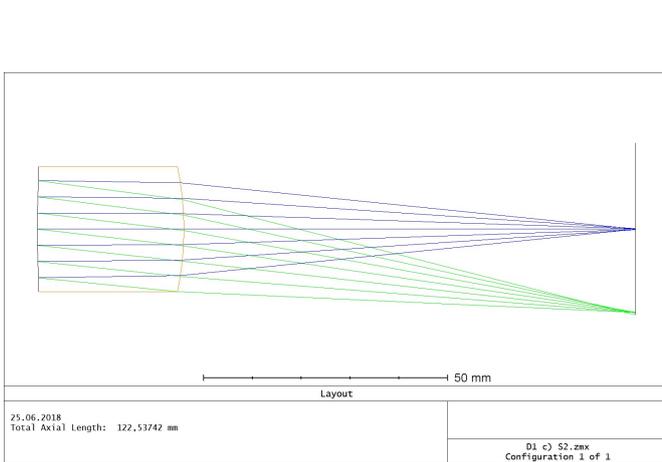


Abbildung 44: Optimiertes Bikonvexlinsensystem

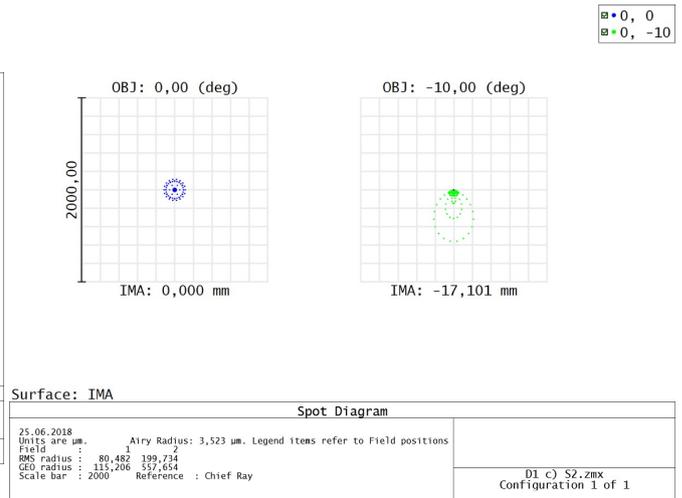


Abbildung 45: Spotdiagramm des optimierten Bikonvexlinsensystems

Die Linse wurde durch die Optimierung merklich dicker, was im Vergleich zuvor die Fokussierung auf die Bildebene verbessert und die Bildfeldwölbung etwas behebt. Die Krümmungsradien wurden ebenfalls merklich variiert. Das Spotdiagramm zeigt auch eine deutliche Verbesserung, achsenparallele Strahlen weisen einen geringen RMS auf sowie die um 10° geneigten treffen zentrierter auf der Bildebene auf. Was an den kleineren Spotradien einzusehen ist.

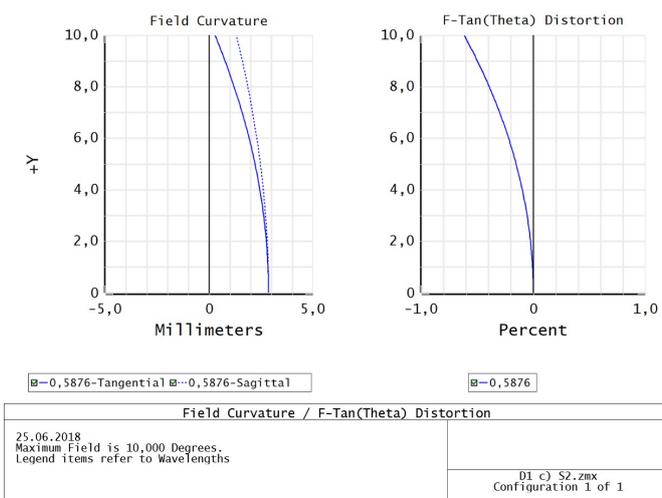


Abbildung 46: Optimiertes Bikonvexlinsensystem, Bildfeldwölbung

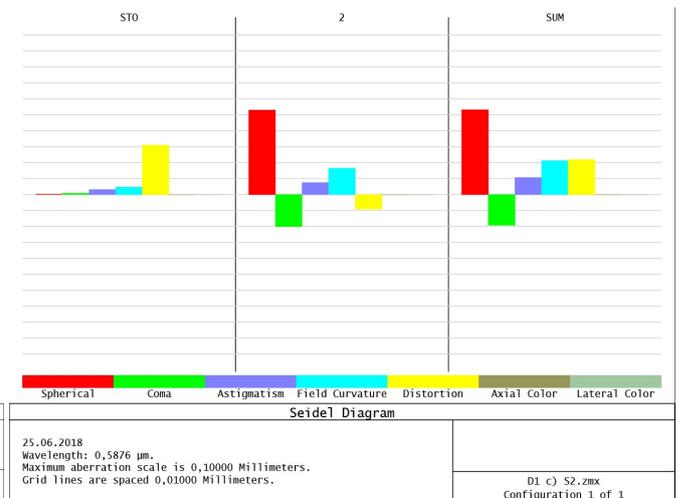


Abbildung 47: Seidelkoeffizienten als relative Bildfehler dargestellt

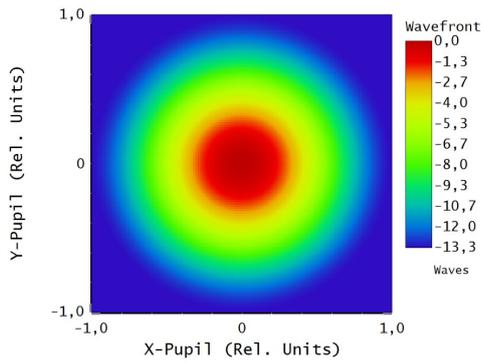
Es fällt auf, dass die Bildfehler nicht komplett zu beheben waren, dennoch konnten Effekte wie Bildfeldwölbung, Astigmatismus schiefer Bündel und Koma minimiert werden. Die Verzeichnung hingegen nahm stark zu, was durch Nachbearbeitung aber zu beheben ist. Die von Zemax bestimmten Wellenfrontfehler wurden mittels Gnuplot über Polynome an die Messwerte angepasst. Hierzu wurde folgende Funktion angepasst:

$$W_0(x, y) = W_{000} + W_{020}(x^2 + y^2) + W_{040}(x^2 + y^2)^2 \quad (56)$$

Bzw. für die um -10° einfallenden Strahlen.

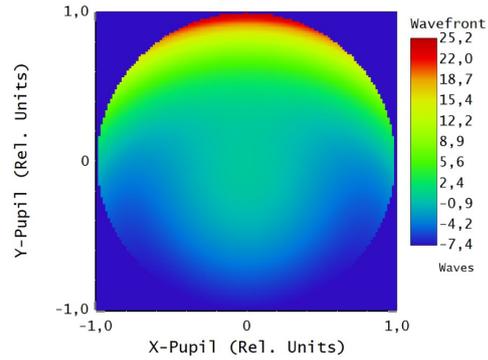
$$W_0(x, y) = W_{000} - W_{111}y + W_{222}y^2 + (W_{020} + W_{220})(x^2 + y^2) - W_{131}(x^2 + y^2)y + W_{040}(x^2 + y^2)^2 \quad (57)$$

Die Anpassungsparameter sind dabei die Seidelkoeffizienten. Zunächst eine Darstellung der Wellenfrontfehler aus Zemax.



Wavefront Function	
25.06.2018 0,5876 $\mu\text{m}$ at 0,00 (deg) Peak to valley = 13,3126 waves, RMS = 3,9457 waves. Surface: Image Exit Pupil Diameter: 2,3785E+01 Millimeters	01 c) S2.zmx Configuration 1 of 1

Abbildung 48: Wellenfrontfehler bei 0° des optimierten Systems



Wavefront Function	
25.06.2018 0,5876 $\mu\text{m}$ at -10,00 (deg) Peak to valley = 32,6770 waves, RMS = 6,2299 waves. Surface: Image Exit Pupil Diameter: 2,3785E+01 Millimeters	01 c) S2.zmx Configuration 1 of 1

Abbildung 49: Wellenfrontfehler bei -10° des optimierten Systems

Nachfolgend die Seidelkoeffizienten die aus Zemax sowie den Anpassungen entnommen wurden.

Seidel Koeffizient	Polynomiale Anpassung für 0°	Polynomiale Anpassung für -10°	Zemax
$W_{000}$	0,0044±0,0047	-0,0017±0,0002	-
$W_{020}$	-25,91±0,02	-	0,0
$W_{040}$	12,57±0,02	12,512±0,002	11,3137
$W_{111} + W_{311}$	-	0,0134±0,0007	18,6319
$W_{222}$	-	8,872±0,001	9,1166
$W_{220}$	-	13,655±0,001	13,6024
$W_{131}$	-	-16,694±0,002	-16,3642

Tabelle 5: Gegenüberstellung der Seidel-Koeffizienten der Anpassung von 0° und 10° mit den von Zemax bestimmten Werten in  $[\lambda]$

Da  $W_{000}$  nur ein Offset bezeichnet ist dieser von Zemax, da dies relative Angaben behandelt, nicht mit bestimmt oder von Bedeutung. Die Abweichung von  $W_{020}$  und  $W_{311}$  ist nicht näher zu erklären. Es ist jedoch anzunehmen, dass Zemax ein allgemeineres Polynom anlegt, oder auch, dass die Least-Squares-Methode beim Anpassung in ein lokales Minimum und kein globales Minimum gelaufen ist. Die anderen Seidel-Koeffizienten liegen nahe an den Werten von Zemax, die Unsicherheit können diesen Abstand dennoch nicht ganz erklären, was auf eine eventuell feinere Anpassungsfunktion von Zemax liegen könnte. Die Messwerte aus Zemax sowie die Anpassungen sind in den folgenden Abbildungen einzusehen.

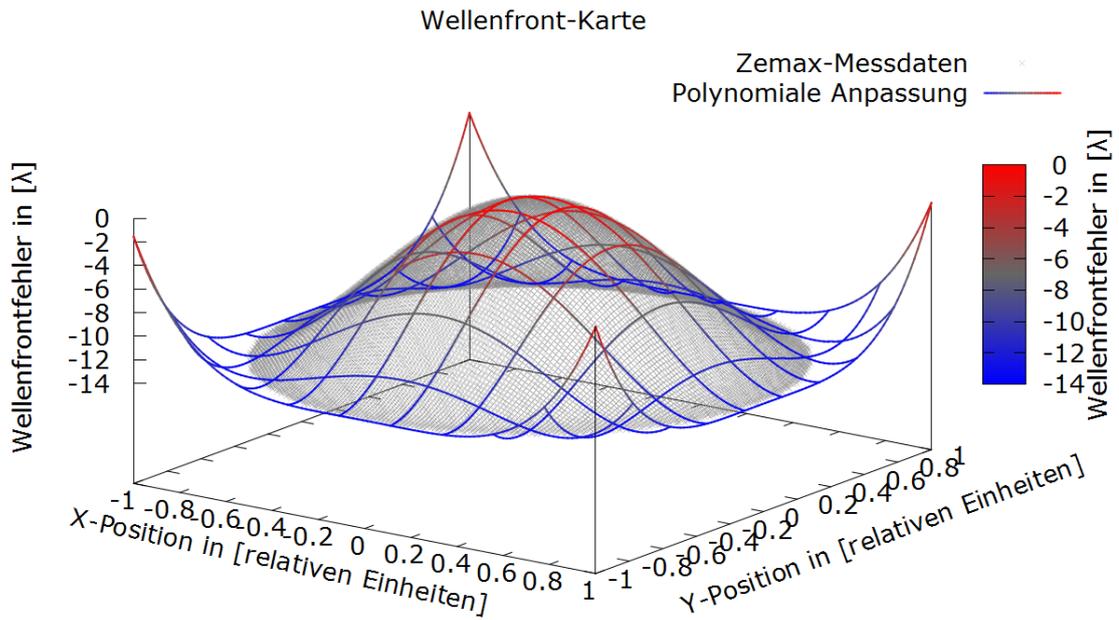


Abbildung 50: Wellenfrontfehler von Zemax und polynomiale Anpassung bei 0°

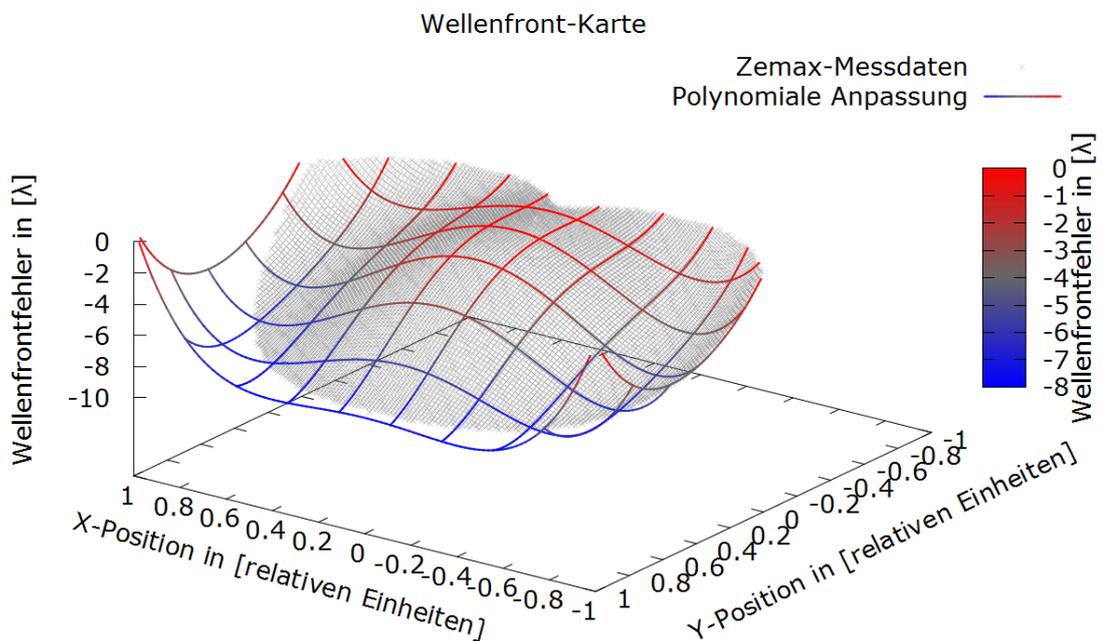


Abbildung 51: Wellenfrontfehler von Zemax und polynomiale Anpassung bei -10°

Die Anpassungen stimmen gut mit den aus Zemax entnommenen Werten überein, was die Verwertbarkeit der Erkenntnisse unterstützt. Insgesamt lässt sich sagen, dass die Optimierung Bildfehler minimieren konnten zum genauen Abbilden noch ungeeignet ist, da noch zu wenige Freiheitsgrade für die Optimierung vorhanden waren.

## 5.5 Zweilinsensystem

Durch die Konstruktion eines Zweilinsensystem mit den gleichen Abbildungseigenschaften soll die Anzahl der Freiheitsgrade für die Optimierung erhöht werden, sodass mehr und besser die verschiedenen Bildfehler behoben werden können. Hier wurde die Linsendicke beider Linsen auf höchstens 15 mm begrenzt. Außerdem wurden zwei weitere Wellenlängen aufgenommen um das Spektrum des Lichts abzudecken, was für Menschen sichtbar ist und so die Optimierung auf ein realitätsnäheres System zu führen. Die Wellenlängen 468 nm und 656 nm wurden dem Wellenfeld ergänzt. Eine Optimierung des Systems ergab sich wie folgend.

Surf	Type	Radius	Thickness	Glass	Clear Diam	Chip Zone	Mech Diam	Conic
OBJ	STANDARD	Infinity	Infinity		0	0	0	0
STO	STANDARD	-333,303	30,00007	N-BK7	20,0532	0	27,28183	0
2	STANDARD	-91,82212	25,92438		27,28183	0	27,28183	0
3	STANDARD	319,9707	29,99831	N-BK7	33,49358	0	36,64267	0
4	STANDARD	-97,83506	78,88746		36,64267	0	36,64267	0
IMA	STANDARD	Infinity			34,93517	0	34,93517	0

Tabelle 6: Charakterisierung des optimierten Systems zweier Linsen und drei Wellenlängen

Das so optimierte System wurde in Zemax wie folgt dargestellt und auf die Spotradien hin untersucht.

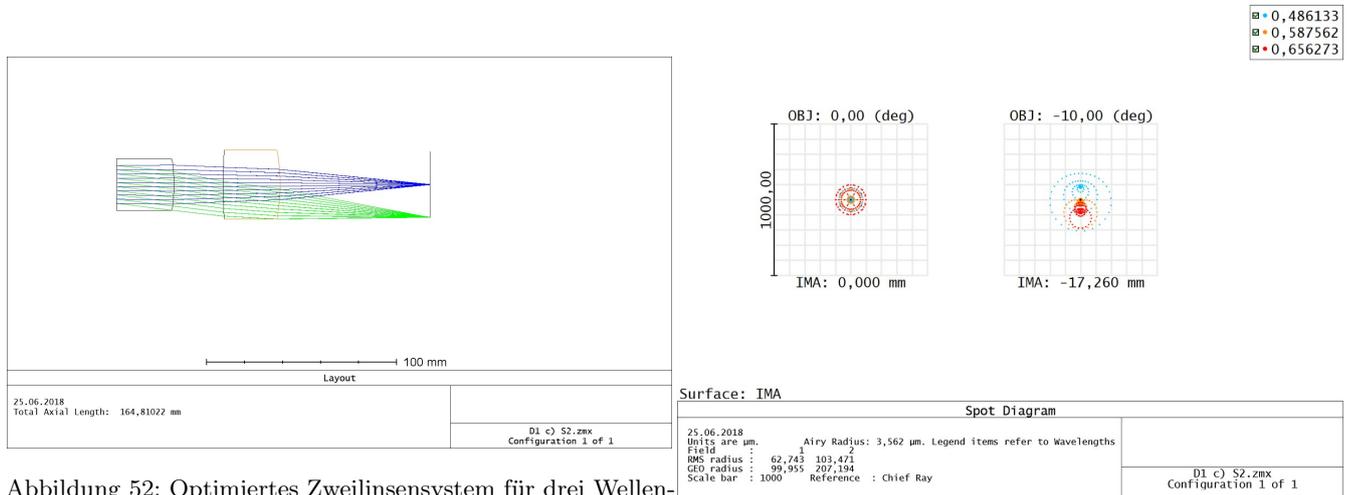


Abbildung 52: Optimiertes Zweilinsensystem für drei Wellenlängen

Abbildung 53: Spotradien des optimierte Zweilinsensystems für drei Wellenlängen

Die Spotradien zeigen für parallele Strahlen einen nochmals kleinen Wert wobei hier nun chromatische Aberration bei den  $-10^\circ$  einfallenden Strahlen eine Verbreiterung hervorruft. Eine betrachtung der Seidelkoeffizienten bestätigt dies.

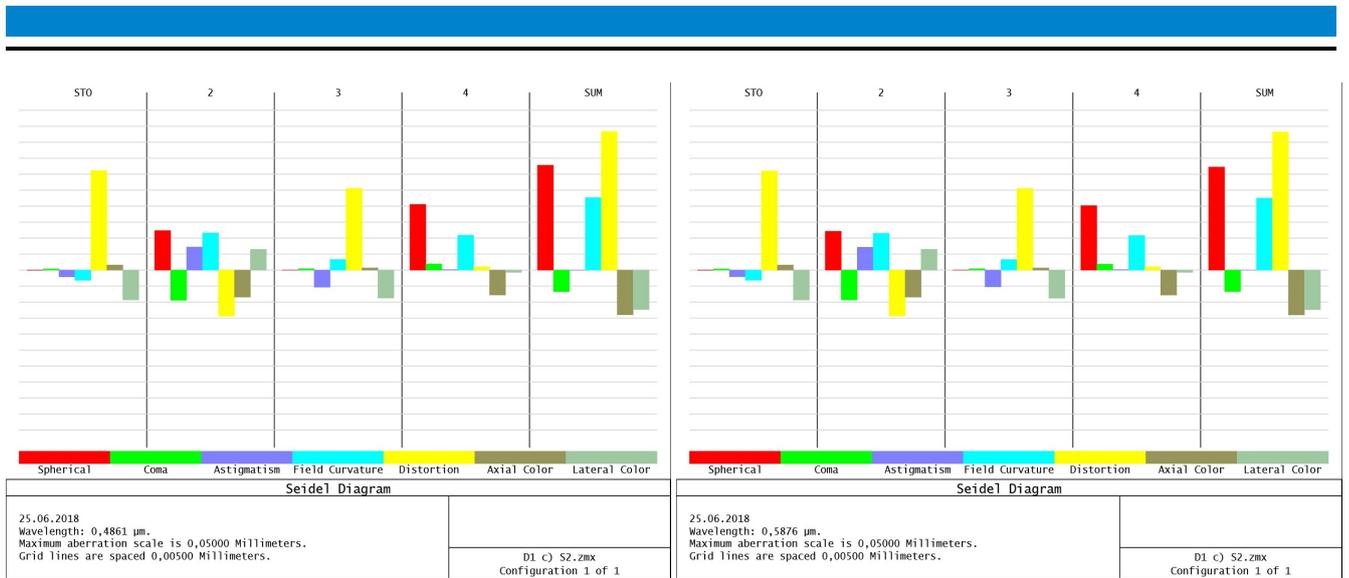


Abbildung 54: Seidelkoeffizienten für das optimierte Zweilinsensystem bei ca. 400 nm

Abbildung 55: Seidelkoeffizienten für das optimierte Zweilinsensystem bei ca. 500 nm

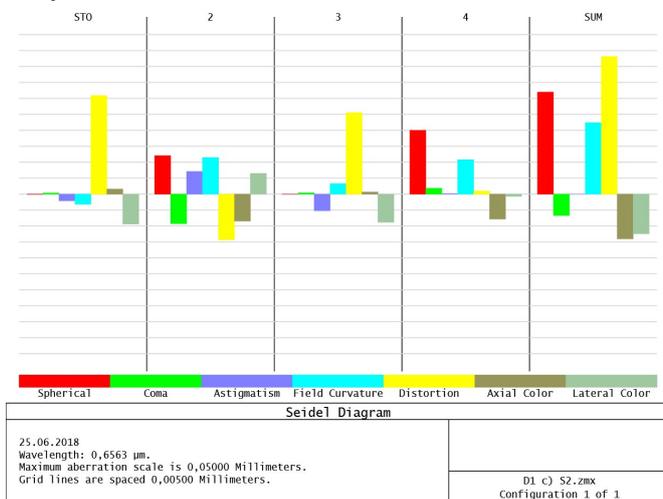


Abbildung 56: Seidelkoeffizienten für das optimierte Zweilinsensystem bei ca. 600 nm

Es ist deutlich festzustellen, dass ein Mehrlinsensystem die einzelnen Bildfehler besser ausgleichen kann. Im wesentlichen konnten Koma sowie Bildfeldwölbung und Astigmatismus schiefer Bündel kaum verringert werden, dafür aber die Verzeichnung und sphärische Aberration. Die neu auftretenden chromatische Aberration tritt durch die jetzt betrachteten Wellenlängen auf.

## 6 Hubble Teleskop

Nach dieser Einfeldung in die Arbeitsumgebung von Zemax und der Untersuchung einfacher System und Bildfehler, soll nun das Hubbleteleskop nachgestellt werden. Es soll für Licht der Wellenlänge 477,5 nm betrachtet und optimiert werden. Dazu kommen Wellenfronten aus drei Winkeln  $0^\circ$ ,  $0,06^\circ$  und  $0,08^\circ$ . Zunächst in paraxialer Näherung.

Surf	Type	Radius	Thickness	Glass	Clear Diam	Chip Zone	Mech Diam	Conic
OBJ	STANDARD	Infinity	Infinity		0	0	0	0
1	STANDARD	Infinity	5,1		2,414242	0	2,414242	0
STO	PARAXIAL	-	-5,02271	MIRROR	2,4	0	2,4	-
3	PARAXIAL	-	6,4	MIRROR	0,2799945	0	0,2799945	-
IMA	STANDARD	Infinity			0,1613329	0	0,1613329	0

Tabelle 7: Charakterisierung Hubble-Teleskops in paraxialer Näherung

Sowie die Darstellung in Zemax und die Spotradien der Einfallswinkel.

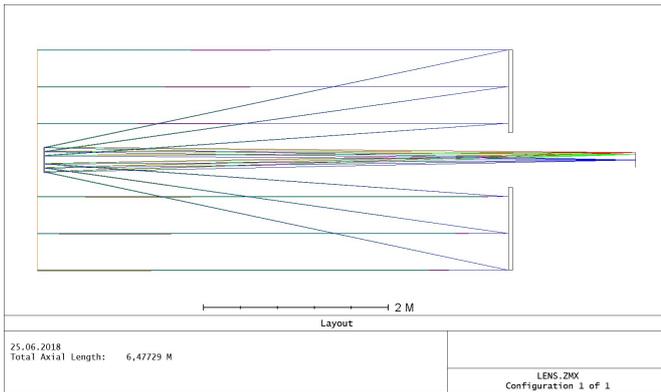


Abbildung 57: Aufbau des Hubble-Teleskops in paraxialer Näherung

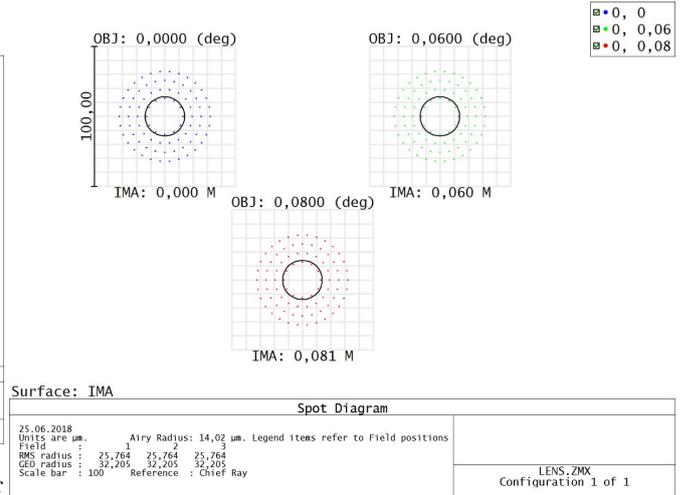


Abbildung 58: Spotradien des Hubble-Teleskops in paraxialer Näherung

Es treten hierbei keine Aberrationen auf, sodass auch die Spotradien sehr klein sind, die Korrektur der Bildebene würde dafür sorgen, dass die Spotradien beliebig klein werden. Da in paraxialer Näherung kein reelles System simuliert wird, werden die zuvor in der H2 berechneten Krümmungsradien der Spiegel eingesetzt.

Surf	Type	Radius	Thickness	Glass	Clear Diam	Chip Zone	Mech Diam	Conic
OBJ	STANDARD	Infinity	Infinity		0	0	0	0
1	STANDARD	Infinity	5,1		2,414242	0	2,414242	0
STO	STANDARD	-11,2974	-5,02271	MIRROR	2,400179	0	2,4	0
3	STANDARD	-1,38775	6,4	MIRROR	0,2683594	0	0,2683594	0
IMA	STANDARD	Infinity			0,2873794	0	0,2873794	0

Tabelle 8: Charakterisierung Hubble-Teleskops mittels der in H2 berechneten Werte.

Es ergab sich folgender Aufbau mit jeweiligen Spotradien.

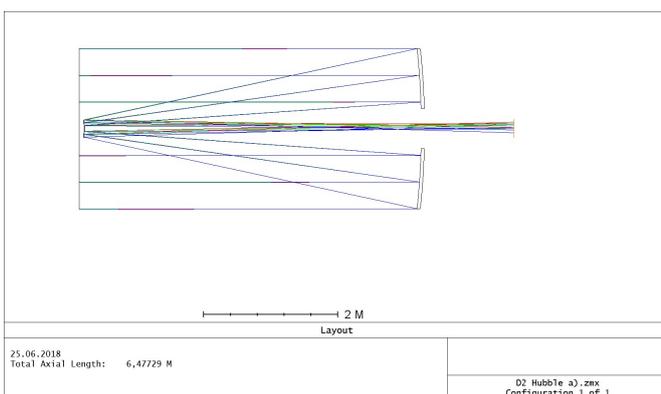


Abbildung 59: Aufbau des Hubble-Teleskops mittels der in H2 berechneten Werte.

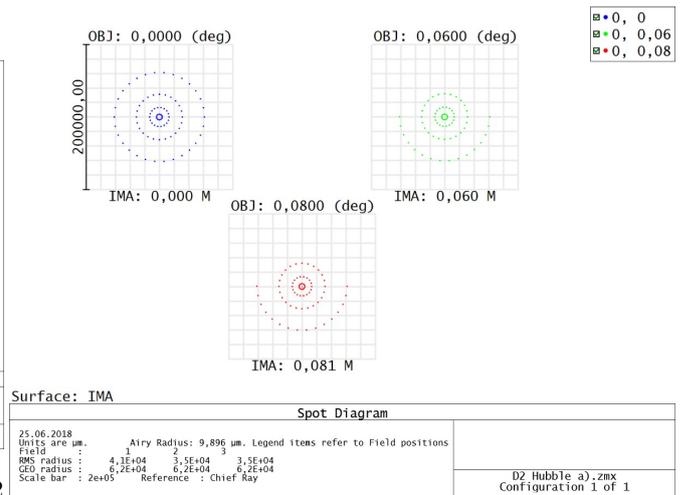


Abbildung 60: Spotradien des Hubble-Teleskops mittels der in H2 berechneten Werte.

Es ist stark auffallend, dass nun keine korrekte Abbildung möglich ist, da keine Fokussierung auf der Bildebene mehr stattfindet, sowie die immense Größe der Spotradien. Da diese bei allen Einfallswinkeln fast gleich ist, ist von sphärischer Aberration auszugehen.

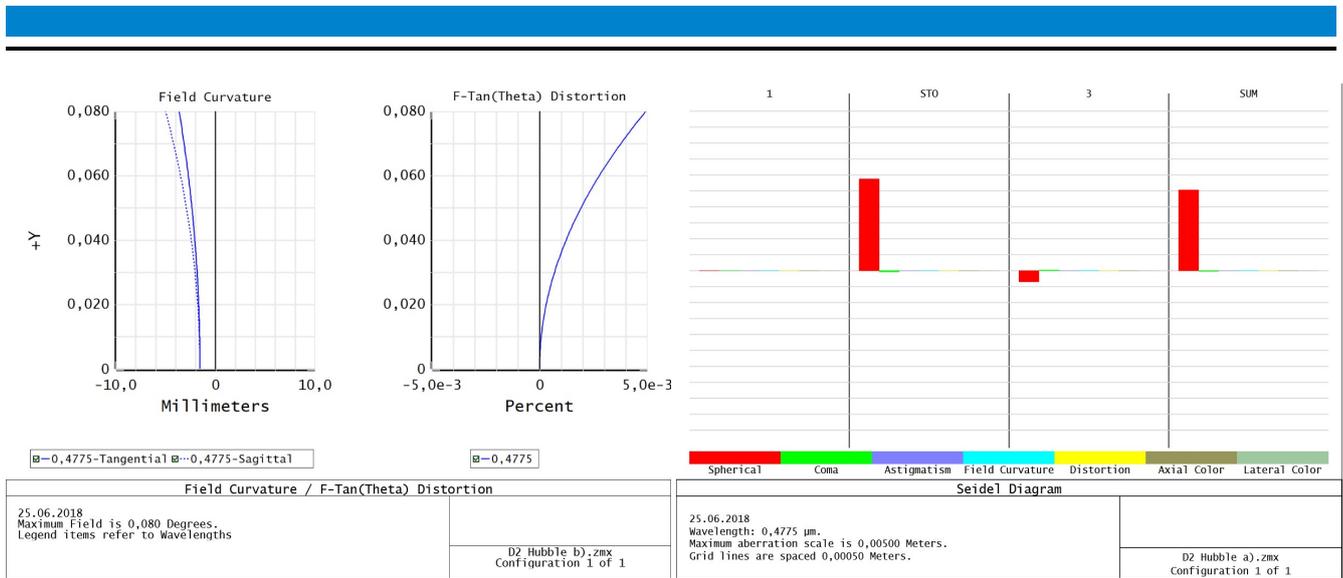


Abbildung 61: Bildfeldwölbung des Hubble-Teleskops mittels der in H2 berechneten Werte. Abbildung 62: Seidelkoeffizienten des Hubble-Teleskops mittels der in H2 berechneten Werte.

Es zeigt sich eine vorhandene Bildfeldwölbung, die von der sphärischen Aberration gänzlich überdeckt wird. Keine anderen Abbildungsfehler sind hierbei von Relevanz. Dieses System ist nicht brauchbar und muss optimiert werden was im folgenden Abschnitt geschehen soll.

## 6.1 Optimierung des Hubble-Teleskops

Die Freiheitsgrade zum Optimieren des Hubble-Teleskops wurden nach und nach der Auftretenden Fehler gewählt, dennoch sollen die physikalischen Dimensionen die gleichen bleiben. Daher dürfen lediglich R2 des zweiten Spiegels die Krümmung der Sensorfläche und deren Konik, sowie Koniken der beiden Spiegel. Da Beugungsbedingt der Spotradius keine sinnvolle Beurteilung der Optimierung liefert, wird der Wellenfrontfehler hierzu genutzt. Es ergab sich ein System zu.

Surf	Type	Radius	Thickness	Glass	Clear Diam	Chip Zone	Mech Diam	Conic
OBJ	STANDARD	Infinity	Infinity		0	0	0	0
1	STANDARD	Infinity	5,1		2,414242	0	2,414242	0
STO	STANDARD	-11,2974	-5,02271	MIRROR	2,400178	0	2,4	-1,00204
3	STANDARD	-1,387713	6,4	MIRROR	0,2804709	0	0,2804709	-1,505762
IMA	STANDARD	-0,6411967			0,1611888	0	0,1611888	-0,805785

Tabelle 9: Charakterisierung Hubble-Teleskops mittels der in H2 berechneten Werte.

Der Systemaufbau sowie die nun nicht mehr zur Analyse verwertbaren Spotradien.

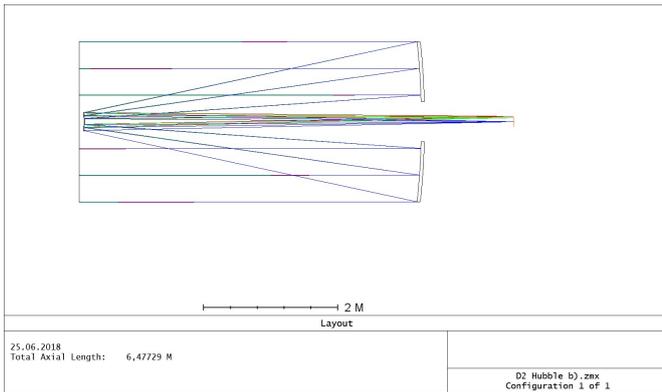


Abbildung 63: Optimierten Hubble-Teleskop aus den aus H2 hervorgegangenen Werten

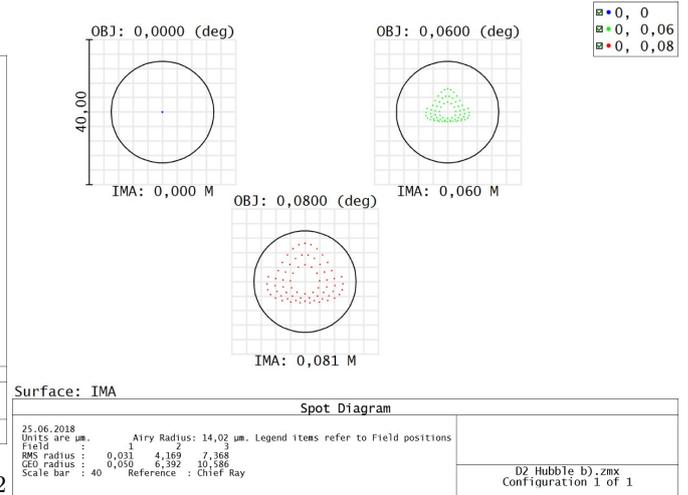


Abbildung 64: Spotradien des optimierten Hubble-Teleskops aus den aus H2 hervorgegangenen Werten

Es zeigt sich, dass nun die fokussierung auf die Bildebene besser verläuft und die Spotradien kleiner sind als der Airy-Radius weshalb nun Beugungseffekte stärker überwiegen.

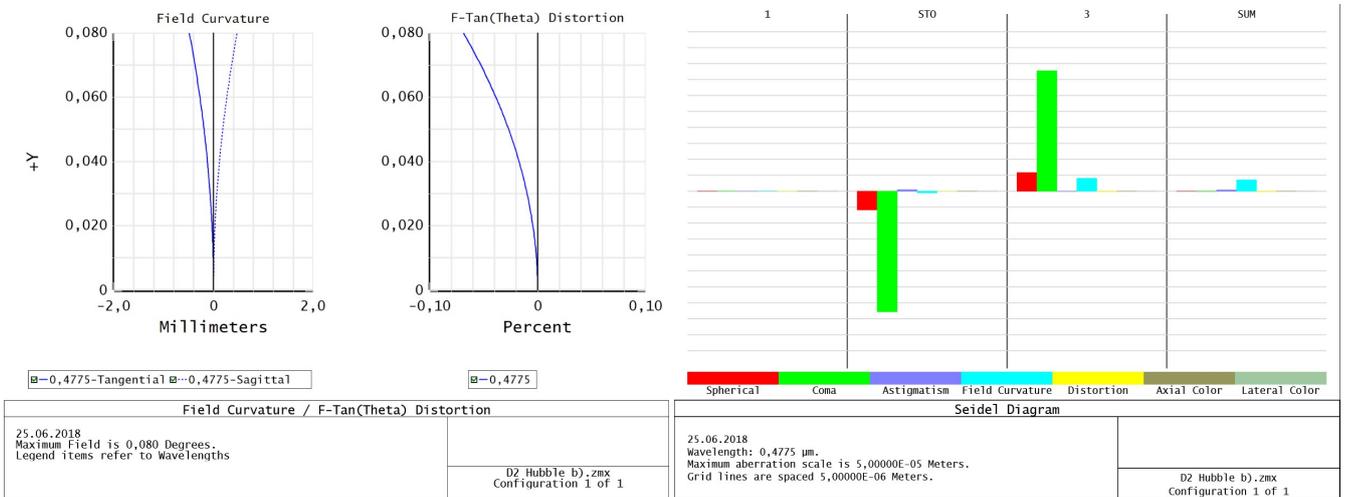


Abbildung 65: Bildfeldwölbung des optimierten Hubble-Teleskops aus den aus H2 hervorgegangenen Werten

Abbildung 66: Seidelkoeffizienten des optimierten Hubble-Teleskops aus den aus H2 hervorgegangenen Werten

Durch die sphärische Anpassung der Bildebene konnte der Bildfeldwölbung behoben werden. Zudem gleichen sich Koma und sphärische Aberration der beiden Spiegel aus somit bleibt eine Rest Bildfeldwölbung welche durch Software etwas auszugleichen wäre, bzw. durch Wölbung des Sensors. Um nun ein Maß zu erhalten für das Auflösungsvermögen dieser Optimierung wird die Modulübertragungsfunktion herangezogen. Sie ist das Kontrastverhältnis von Bild zu Objekt über die Raumfrequenz des betrachteten Bereichs. Hierbei ist die Raumfrequenz das Inverse des Seh winkels in einheiten vom milli rad. Die Auflösung der Raumfrequenz nimmt somit für ansteigende Seh winkel ab.

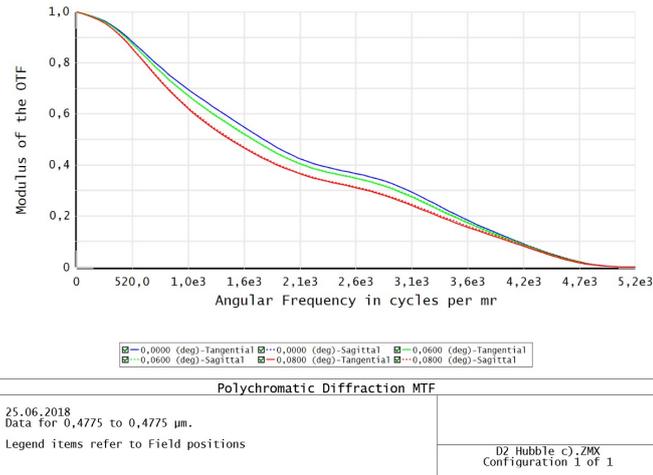


Abbildung 67: MTF des optimierten Hubble-Teleskops aus den aus H2 hervorgegangenen Werten

Mittels eines Beispiels soll die Leistung des so konstruierten Teleskops ermessens werden. Hierzu werden zwei Sterne im Andromedanebel betrachtet, diese seien  $2,5 \cdot 10^6$  Lichtjahre von der Erde entfernt. Der Abstand der Sterne zueinander soll 4,34 Lichtjahre betragen. Für den Sehwinkel ergibt sich somit

$$\sin\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \frac{d}{2l} \quad (58)$$

und liefert für  $\alpha \approx 8,68 \cdot 10^{-7} \text{ rad}$  und  $\frac{1}{\alpha} = f \approx 576 \frac{1}{\text{mrad}}$  für die Raumfrequenz. Eine untere Abschätzung für die Auflösung ist so definiert, dass die MTF mindestens 50% bei der betrachteten Raumfrequenz beträgt und somit zwei Objekte aufgelöst werden können. Es liest sich ein Wert von über 80% für diese Raumfrequenz ab bei einem Einfallswinkel von  $0,08^\circ$ , damit lässt sich diese Beispiel durch das Teleskop gut auflösen. Ebenfalls könnte das Rayleigh-Kriterium zur Auflösungsbewertung herangezogen werden.

$$\alpha_{\text{krit-rayleigh}} = 1,22 \frac{\lambda}{D_1} \approx 2,4 \cdot 10^{-7} \text{ rad} < 1,7 \cdot 10^{-6} \text{ rad} \quad (59)$$

Auch das Rayleigh-Kriterium liefert, dass die Sterne getrennt voneinander aufgelöst werden können, da Beugungseffekte für dieses Beispiel nicht auftreten. Mit diesem Teleskop würde man ein Bild aufnehmen können welches beispielhaft in Zemax simuliert wurde.



Image Simulation: Geometric Aberrations	
25.06.2018 Object height is 0,0800 degrees. <b>Field position:</b> 0,0000 (deg) Center: chief ray Image size is 0,1123 W x 0,0806 H (Meters)	<b>D2 Hubble c).ZMX</b> <b>Configuration 1 of 1</b>

Abbildung 68: Aufgenommenes Bild des optimierten Hubble-Teleskops aus den aus H2 hervorgegangenen Werten(Simuliert)

## 6.2 Fertigungsfehler am Hubble-Teleskop

Das Hubble-Teleskop wurde aufgrund fehlerhafter Fertigung mit einer konischen Konstante des Hauptspiegels von -1,0144 anstatt -1,0023 gefertigt. Dies sorgte für nahezu unbrauchbare Bilder. Dies sollte mit dem optimierten System getestet werden.

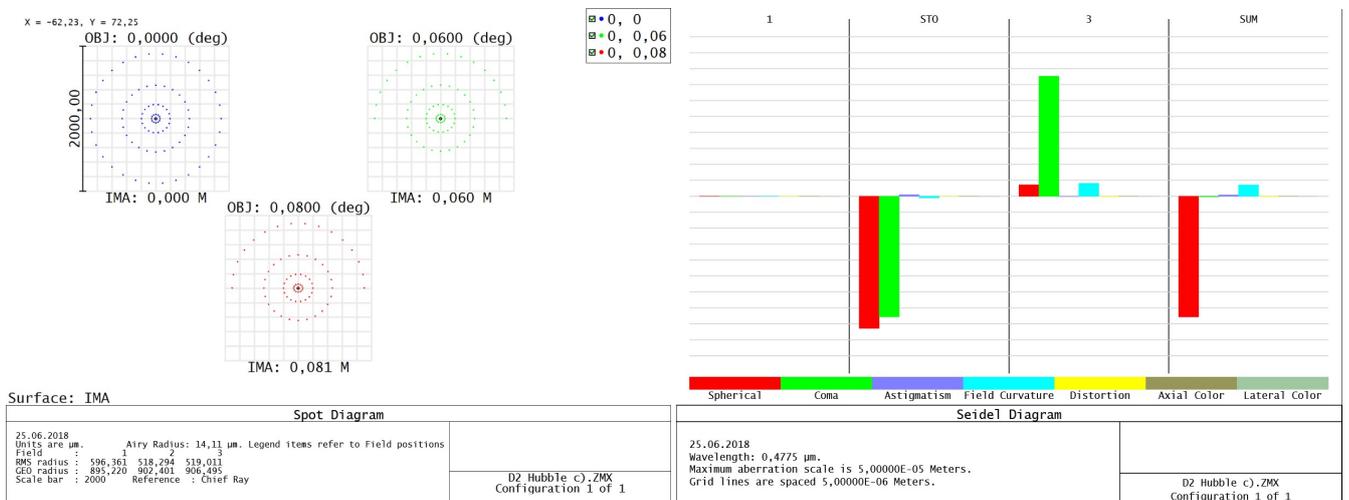


Abbildung 69: Spotdiagramm des Fehlerhaften Hubble-Teleskops

Abbildung 70: Seidelkoeffizienten des Fehlerhaften Hubble-Teleskops

Es ist zu erkennen, dass die Spotradien um ein Vielfaches größer geworden sind, dies liegt an der großen vorhandenen sphärischen Aberration. Ebenso ist zu erkennen, dass für das vorherige Beispiel ein MTF Wert von unter 10% zu erwarten ist, was deutlich macht wie stark die Auflösung durch diesen Fehler beeinflusst wurde.

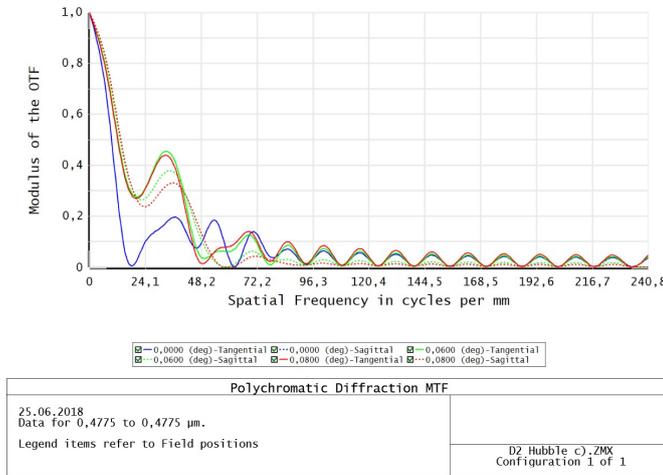


Abbildung 71: MTF des Fehlerhaften Hubble-Teleskops

Würde ein Bild mit diesen Teleskop dargestellt werden, würde sich folgendes ergeben.

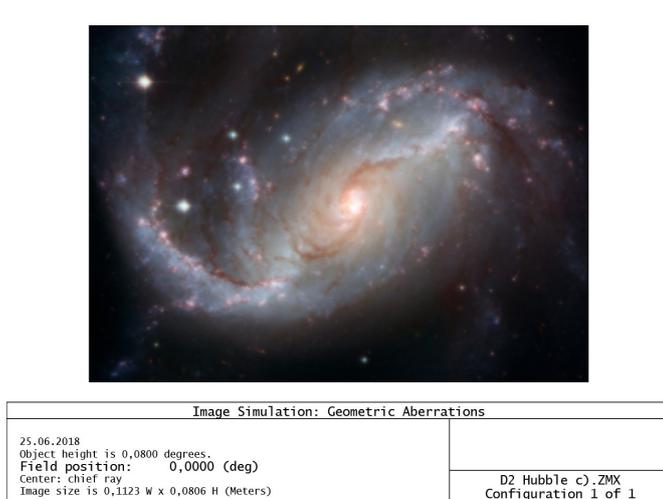


Abbildung 72: Beispielbild einer Galaxie des Fehlerhaften Hubble-Teleskops

## 7 Fazit

Es wurde mit diesem Versuch ein anschaulicher Weg gezeigt Bildfehler zu betrachten ihre Ursachen zu verstehen und zu vermeiden. Die Zusammenhänge der einzelnen Fehler konnten näher gebracht werden. Die Bildfehler bei den Singulett Systemen konnten beobachtet erklärt und behoben werden. Dabei wurde die verschiedenen Analysewerkzeuge und deren Bedeutung verstanden. Ebenso konnte der Wellenfrontfehler durch Gnuplot an polynomiale Funktionen angepasst und somit die Seidelkoeffizienten bestimmt werden. Die dabei gemachten Fehler lassen auf eine umfangreichere Darstellung in Zemax schließen. Ein Zweilinsensystem zeigte wie eine Erhöhung der Freiheitsgrade der Optimierung weiter ermöglicht Bildfehler zu beheben. Im letzten Teil wurde der Aufbau des Hubble-Teleskops klar, sowie der Einfluss der Konik auf das Auflösungsvermögen, was durch quantitative Rechnungen wie MTF und dem Rayleigh-Kriterium, sowie qualitativ durch die Bilddarstellung einer Beispielgalaxie möglich wurde.

---

## 8 Quellen

---

- [1] <https://www.optikunde.de/lupe/>, Stand: 11.08.2018, 22:28 Uhr
- [2] <https://www.leifiphysik.de/optik/optische-linsen/geschichte/mikroskop-geschichte>, Stand: 11.08.2018, 22:31 Uhr
- [3] <https://www.wissen.de/die-erfindung-des-teleskops>, Stand: 11.08.2018, 22:31 Uhr
- [4] <https://www.bernd-leitenberger.de/hst.shtml>, Stand: 11.08.2018, 22:33 Uhr
- [5] Walser R., Sturm M., Versuchsanleitung zum Versuch 4.12: Design optischer Systeme, TU-Darmstadt, Version vom 25.08.2015
- [6] Halfmann T., Vorlesungsskript zur Experimentalphysik III im Wise 2016/2017, TU Darmstadt, Stand: 24.08.2016
- [7] [http://www.physics.ttk.pte.hu/files/TAMOP/FJ\\_Nonlinear\\_Optics/3\\_the\\_nonlinear\\_polarization.html](http://www.physics.ttk.pte.hu/files/TAMOP/FJ_Nonlinear_Optics/3_the_nonlinear_polarization.html), Stand: 11.08.2018, 22:34 Uhr
- [8] Bartelmann, M., Feuerbacher, B., Krüger, T., Lüst, D., Rebhan, A., Wipf, A., Theoretische Physik, Springer, 2015
- [9] [http://www.chemgapedia.de/vsengine/vlu/vsc/de/ch/3/anc/ir\\_spek/ir\\_reflexion.vlu.html](http://www.chemgapedia.de/vsengine/vlu/vsc/de/ch/3/anc/ir_spek/ir_reflexion.vlu.html), Stand: 11.08.2018, 22:38 Uhr
- [10] [http://www.physik.fh-aachen.de/startseite/physik\\_fuer\\_elektrotechnik/praktikum/linsen/4/](http://www.physik.fh-aachen.de/startseite/physik_fuer_elektrotechnik/praktikum/linsen/4/), Stand: 11.08.2018, 22:38 Uhr
- [11] <http://www.peter-junglas.de/fh/vorlesungen/physik1/html/kap6-6.html>, Stand: 11.08.2018, 22:39 Uhr
- [12] [https://de.wikipedia.org/wiki/Bildweite#/media/File:Sammellinse\\_Skizze.png](https://de.wikipedia.org/wiki/Bildweite#/media/File:Sammellinse_Skizze.png), Stand: 11.08.2018, 22:40 Uhr
- [13] E. Hecht. Optics, Addison Wesley, 2002
- [14] <https://light-microscope.net/wp-content/uploads/2015/04/Vergroesserung.jpg>, Stand: 11.08.2018, 22:40 Uhr
- [15] <http://www.harfesoft.de/aixphysik/strahlen/OptInst/Vorlesung/MatrizenOptik/>, Stand: 11.08.2018, 22:42 Uhr
- [16] Guenther R. D., Modern Optics, John Wiley & Sons, 1990
- [17] <https://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/thumb/4/4d/Lens5.svg/langde-512px-Lens5.svg.png>, Stand: 11.08.2018, 22:45 Uhr
- [18] <http://www.scandig.eu/Kameraverzerrung.html>, Stand: 11.08.2018, 22:45 Uhr
- [19] <https://www.stemmer-imaging.de/de/grundlagen/blendenzahl-blendenoeffnung/>, Stand: 11.08.2018, 22:46 Uhr
- [20] H. Gross, H. Zügge, M. Peschka, and F Blechinger. Handbook of Optical Systems, volume 3: Aberration Theory and Correction of Optical Systems, Wiley-VCH, 2007
- [21] R. R. Shannon, The Art and Science of Optical Design, Cambridge University Press, 1997
- [22] <https://www.trioptics.com/de/knowledge-base/mtf-und-abbildungsqualitaet/>, Stand: 11.08.2018, 22:47 Uhr