Inhalt

Lässt man einen Körper aus einer bestimmt Höhe runter fallen, so wird er immer schneller. Die Frage ist wie schnell? Gibt es eine maximale Geschwindigkeit? Hängt diese Geschwindigkeit von der Form oder der Masse des Körpers ab?

Alles Fragen, die wir hier beantworten werden.

Es sind zwei Fälle zu unterscheiden: Freier Fall im Vakuum und im Medium. Wir betrachten zuerst den freien Fall im Vakuum.

Freier Fall ohne Luftwiderstand

Nach dem Newton'schen Gravitationsgesetz wirkt auf den Schwerpunkt eines Körpers die Gravitationskraft $F_g = G\frac{Mm}{r^2}$. Dabei ist M die Masse des Planeten, r der Abstand vom Erdmittelpunkt zum Körper[1], m die Masse des Körpers und $G = 6{,}674 * 10^{-11}\frac{m^3}{kg*s^2}$ die Gravitationskonstante. Nach dem zweiten Newton'schen Axiom gilt:

$$ma = G\frac{Mm}{r^2}$$

$$a = G\frac{M}{r^2}$$

Das ist die Beschleunigung eines frei fallenden Körpers. Setzt man in die Gleichung die Masse und den Radius der Erde ein[2], so erhält man die Erdbeschleunigung[3] $a = 9{,}81\frac{m}{s^2}$.

[1] Das Newton'sche Gravitationsgesetz beschreibt die Kraft zwischen zwar Punktmassen. Aufgrund eines großen Abstandes kann man einen Körper auf der Erdoberfläche als einen Punkt auffassen. Die Erde ist aber offensichtlich kein Punkt und doch gilt dieses Gesetz. Dies kann man zeigen in dem man über die Gravitationskraft jedes einzelnen Massepunktes der Erde integriert. Das Ergebnis ist äquivalent zu dem, als ob die gesamte Masse der Erde im Erdmittelpunkt liegt.

[2] Masse der Erde: $5{,}974 \cdot 10^{24}$ kg, Radius: 6370 km

[3] Wie man sieht, hängt a von r ab, also $a(r)$. Da die Erde bekanntlich keine perfekte Kugelform besitzt und r entsprechend Ortsabhängig ist, so ist auch g ortsabhängig (g nennt man auch Ortsfaktor). Das ist neben der inhomogenen Massenverteilung einer der Gründe, warum die Erdbeschleunigung nicht überall gleich ist.

Da wir jetzt die Beschleunigung besitzen, können wir leicht die Geschwindigkeits- $v(t)$ und Ortsfunktion $s(t)$ ausrechnen, in dem wir folgende Definitionen verwenden.

Die Geschwindigkeit ist die erste Ableitung des Ortes nach der Zeit.

$$v = \frac{ds}{dt}$$

Die Beschleunigung ist die erste Zeitableitung der Geschwindigkeit bzw. die zweite Zeitableitung des Ortes.

$$a = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2s}{dt^2}$$

Wir wollen $v(t)$ berechnen. Dazu verwenden wir die oberen Definitionen und trennen die Variablen dv und dt.

$$a = \frac{dv}{dt} \quad \Rightarrow \quad dv = a\,dt$$

Jetzt integrieren wir über die beiden Variablen.

$$\int_{v_0}^{v} dv = \int_{0}^{t} a\,dt$$

$$v - v_0 = at + C$$

$$v(t) = v_0 + at + C$$

Die Integrationskonstante muss Null sein, wenn wir festlegen, dass zum Zeitpunkt $t = 0$, der Körper eine Anfangsgeschwindigkeit v_0 besitzt:

$$v(t = 0) = v_0 + a * 0 + C = v_0$$

Damit haben wir eine Gleichung für die Geschwindigkeit[4]:

$$v(t) = v_0 + at$$

Setzen wir anstelle von a die Erdbeschleunigung g ein, so erhalten wir eine Geschwindigkeitsgleichung für den freien Fall ohne den Luftwiderstand[5].

$$v(t) = v_0 + gt$$

$$v(t) = v_0 + G\frac{M}{r^2}t$$

[4] Die Herleitung war unabhängig von der Betrachtung des freien Falls. Das ist die Gleichung für die gleichmäßig beschleunigte Bewegung.

[5] Diese Gleichung gilt nur kleinen Fallhöhen geeignet, da der Abstand r mit steigender Fallhöhe auch steigt.

Betrachtet man die Gleichung, so werden zwei Merkmale klar. Erstens steigt die Geschwindigkeit mit der Zeit immer weiter an und zweitens ist sie nicht von der Masse des Körpers abhängig. So fallen alle Objekte, egal welcher Form und welcher Masse, in einem luftleeren Raum (z.B. auf dem Mond) immer gleich schnell. Auf der Erde wird dieses Verhalten (zum Glück) durch den Luftwiderstand verhindert.

Um die Ortsfunktion zu bekommen, geht man analog wie bei der Geschwindigkeitsfunktion vor.

$$v = \frac{ds}{dt} \Rightarrow ds = v\,dt$$

$$\int_{s_0}^{s} ds = \int_{v_0}^{v} v\,dt$$

$$s - s_0 = v_0 t + \frac{1}{2}at^2 + C$$

Die Konstante C muss null sein, wenn wir fordern, dass zum Zeitpunkt $t = 0$ der Weg gleich s_0 ist.

$$s(t) = s_0 + v_0 t + \frac{1}{2}at^2$$

Durch das ersetzen von a durch $G\frac{M}{r^2}$ erhält man die Ortsfunktion nach der Zeit für den freien Fall ohne den Luftwiderstand.

$$s(t) = s_0 + v_0 t + \frac{GM}{2r^2}t^2$$

Weiter schauen wir uns an, wie sich die Bewegungsgleichung verändert, wenn zusätzlich der Luftwiderstand betrachtet wird. Aus Erfahrung wissen wir bereits, dass ein frei fallendes Objekt irgendwann eine Maximalgeschwindigkeit erreicht und nicht weiter beschleunigt wird. Wäre es nicht der Fall, so würde ein Fallschirmspringer wie ein Stein zum Boden fallen.

Herleitung des Luftwiderstandes

Zunächst stellt sich die Frage was der Luftwiderstand ist und wie man die Kraft, die einem bewegten Objekt entgegen wirkt, beschreibt.

Man überlegt sich, dass ein mit Geschwindigkeit v bewegter Körper bei seiner Bewegung die Luft mit der Masse m vor sich hin schiebt und zwar logischerweise mit der gleichen Geschwindigkeit v.

Infinitesimal betrachtet, heißt es, dass ein Objekt in der Zeit dt die Strecke ds zurücklegt.

$$ds = v\,dt$$

Multipliziert man diese Strecke mit der Frontalfläche des Objekts, so bekommt man das Luftvolumen raus, welches vor dem Objekt hergeschoben wird.

$$dV = Av\,dt$$

Über die Luftdichte kommt man auf die Masse dieses Volumens.

$$dm = \rho Av\,dt$$

Eine sich bewegende Masse hat folgende kinetische Energie.

$$dE = \frac{1}{2}v^2 dm$$

$$dE = \frac{1}{2}v^3 \rho A\,dt$$

Nach einer Zeit dt wird also Energie dE für das Schieben der Luft benötigt[6]. Die Ableitung der Energie nach der Zeit ist aber die Leistung und diese wiederum ist als Kraft mal Geschwindigkeit definiert. Durch das Umstellen kommt man auf die Luftwiderstandskraft.

$$\frac{dE}{dt} = P = \frac{1}{2}v^3 \rho A$$

$$P = Fv \Rightarrow F = \frac{P}{v}$$

$$F = \frac{1}{2}v^2 \rho A$$

Diese Gleichung beruht auf der Annahme, dass die Luft vor dem Objekt geschoben wird. In der Realität müssen aber viele andere Faktoren, wie die Gaszusammensetzung, sowie die Form und die Eigenschaften der Oberfläche berücksichtigt werden. Alle diese Faktoren werden durch einen zusätzlichen experimentell bestimmten Faktor - den c_w–Wert beschrieben[7].

Die endgültige Form der Gleichung lautet:

$$F_w = c_w \frac{1}{2}v^2 \rho A$$

Freier Fall mit Luftwiderstand

Auf einen frei fallenden Körper wirken zwei Kräfte: die Gewichtskraft und die Widerstandskraft, die in die entgegengesetzte Richtung gerichtet ist.

$$ma = mg - c_w \frac{1}{2}v^2 \rho A$$

[6] Interessant zu sehen ist, dass die Geschwindigkeit hier mit der dritten Potenz aufritt. Wird die Geschwindigkeit verdoppelt, so erhöht sich der Energiebedarf um Faktor 6.

[7] Autohersteller sind bemüht durch eine aerodynamische Form der Autos den c_w-Wert möglichst klein zu halten, weil es sich positiv auf den Spritverbrauch auswirkt.

Bereits aus dieser Gleichung kann man die Maximalgeschwindigkeit berechnen. Sie ist nämlich dann erreicht, wenn der Körper nicht mehr beschleunigt wird, also wenn $a = 0$ oder anderes gesagt, wenn die beiden Kräfte gleich stark sind.

$$0 = mg - c_w \frac{1}{2} v^2 \rho A$$

$$v_E = \sqrt{\frac{2mg}{c_w \rho A}}$$

Dies ist die Endgeschwindigkeit (Maximalgeschwindigkeit) die ein Fallschirmspringer erreicht. Sie kann verringert werden, indem man die Fläche A oder den c_w-Wert erhöht.

Im folgenden Plot erkennt man deutlich, dass mit der steigender Masse die Endgeschwindigkeit immer größer wird ($c_w = 0{,}5; A = 1m^2; \rho = 1{,}2\frac{kg}{m^3}; g = 9{,}81\frac{m}{s^2}$).

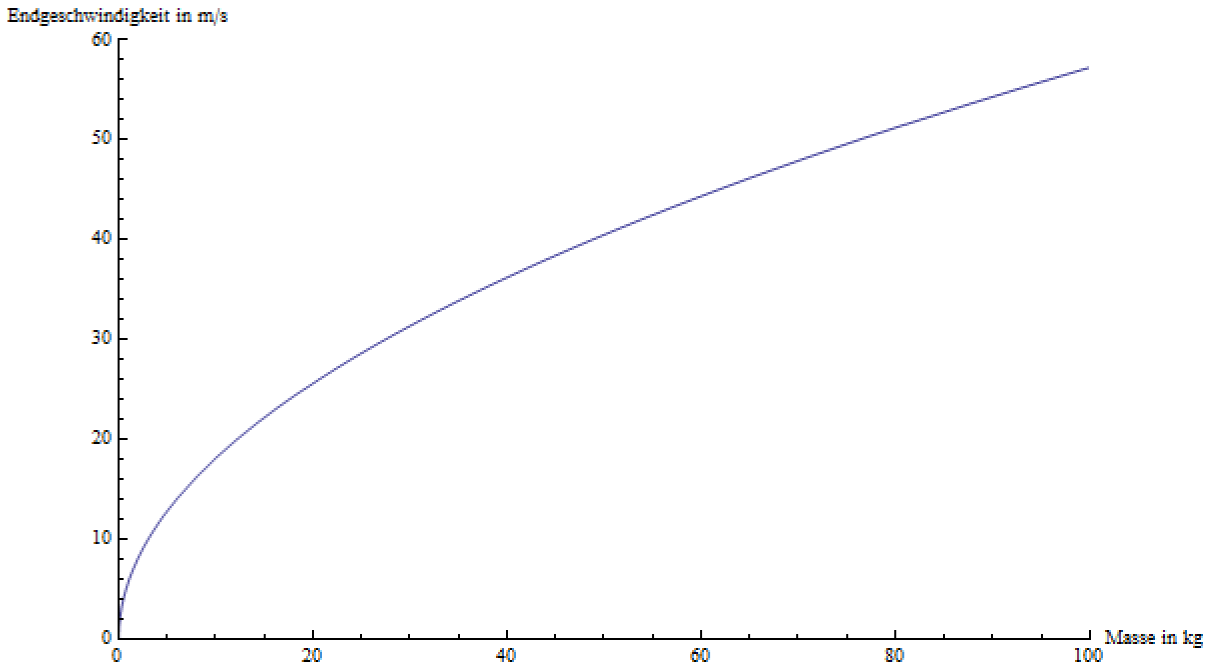

Abbildung 1: Endgeschwindigkeit in Abhängigkeit von der Masse

Demnach erreicht ein schwererer Fallschirmspringer auch eine höhere Geschwindigkeit, vorausgesetzt, andere Parameter bleiben gleich.

Doch kommen wir zu der Bewegungsgleichung zurück.

$$m\frac{dv}{dt} = mg - c_w \frac{1}{2} v^2 \rho A$$

Diese Differentialgleichung lösen wir wieder mit Trennung der Variablen. Hier wird eine geschickte Umformung benötigt, um leichter zu Integrieren.

$$m\,dv = \left(mg - c_w \frac{1}{2} v^2 \rho A\right) dt$$

$$\frac{m}{\left(mg - c_w \frac{1}{2} v^2 \rho A\right)}\,dv = dt$$

Wir klammern mg herraus.

$$\frac{m}{mg\left(1 - \frac{c_w \rho A}{2mg}\, v^2\right)}\,dv = dt$$

Betrachtet man den großen Term in der Klammer, so stellt man fest, dass es offensichtlich, der Kehrwert von v_E^2 ist.

$$\frac{1}{g\left(1 - \frac{v^2}{v_E^2}\right)}\,dv = dt$$

$$\int_{v_0}^{v} \frac{1}{1 - \frac{v^2}{v_E^2}}\,dv = g\int_0^t dt$$

Wir substituieren $\frac{v}{v_E}$ durch x. Daraus folgt $\frac{dx}{dv} = \frac{1}{v_E} \Rightarrow\ dv = v_E dx.$[8]

$$\int_{v_0}^{v} \frac{1}{1 - x^2}\, v_E dx\ = g\int_0^t dt$$

$$\int_{v_0}^{v} \frac{1}{1 - x^2}\, dx\ = \frac{g}{v_E}\int_0^t dt$$

An dieser Stelle kann man das Integral auf beiden Seiten mit 2 multiplizieren und die Beziehung $\frac{2}{1-x^2} = \frac{1}{1-x} + \frac{1}{1+x}$ verwenden um dann auf eine Lösung mit e-Funktionen zu kommen. Oder man schaut einfach in einer Formelsammlung für höhere Mathematik[9] nach und findet dort die Lösung zum Integral:

$$\int \frac{1}{1 - x^2}\, dx\ = \operatorname{arctanh}(x)$$ [10]

Diese Lösung gibt nur dann, wenn $|x| < 1$, was offensichtlich der Fall ist, denn v ist immer kleiner als v_E.

So kommen wir auf die Lösung der Differentialgleichung:

---

[8] Die Integrationsintervalle wurden aus Bequemlichkeit nicht substituiert. Dafür dürfen sie bis zur Resubstituierung nicht angefasst werden.
[9] z.B. „Formeln + Hilfen zur höheren Mathematik“ aus dem Binomi Verlag
[10] Arctanh (arcus tangens hyperbolicus) ist die Umkehrfunktion von tanh (tangens hyperbolicus).

$$\operatorname{arctanh}\left(\frac{v}{v_E}\right)\Big|_{v_0}^{v} = \frac{g}{v_E}t$$

$$\operatorname{arctanh}\left(\frac{v}{v_E}\right) - \operatorname{arctanh}\left(\frac{v_0}{v_E}\right) = \frac{g}{v_E}t + C$$

Wir nehmen an, dass zum Zeitpunkt $t = 0$ das Objekt in Ruhe ist, also $v_0 = 0$. Dadurch ist auch der zweite Arcus Tangens Hyperbolicus -Term gleich Null.

$$\operatorname{arctanh}\left(\frac{v}{v_E}\right) = \frac{g}{v_E}t + C$$

Wir möchte immer noch nach v umstellen, deswegen wenden wir auf beiden Seiten der Gleichung $tanh$ an, damit $arctanh$ verschwindet.

$$\frac{v}{v_E} = \tanh(\frac{g}{v_E}t + C)$$

$$v = v_E \tanh(\frac{g}{v_E}t + C)$$

Zum Zeitpunkt $t = 0$ muss v gleich Null sein, also muss C gleich Null sein, ansonsten stimmt die Gleichung nicht.

$$v(t) = v_E \tanh(\frac{g}{v_E}t)$$

Da $\lim_{t\to\infty} \tanh(t) \to 1$, läuft die ganze Funktion gegen v_E. Am besten schaut man sich den Funktionsplot anhand eines Beispiels an. In diesem Fall ist $v_E = 50\frac{m}{s}$.

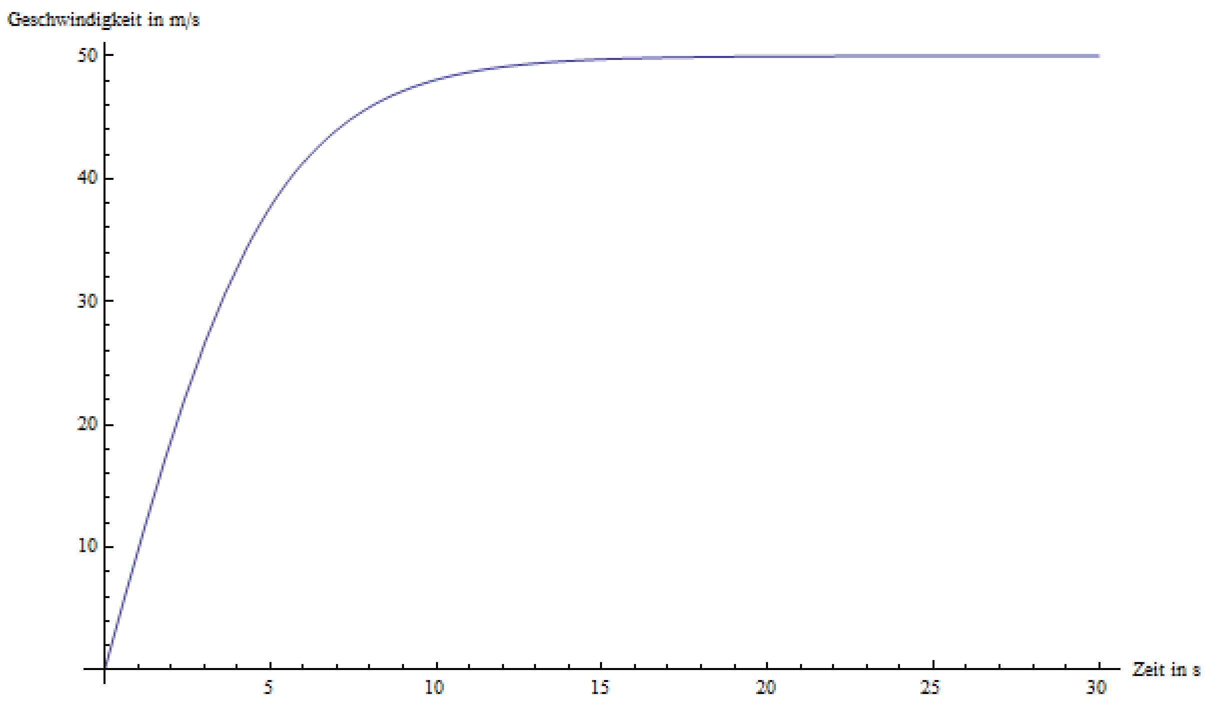

Abbildung 2: Geschwindigkeit aufgetragen gegen die Zeit

Bereits nach wenigen Sekunden im freien Fall wird die Maximalgeschwindigkeit erreicht. Diese ist je nach Masse des Objekts unterschiedlich. Dies wird wieder an einem Funktionsgraph mit oben angegeben Werten verdeutlicht.

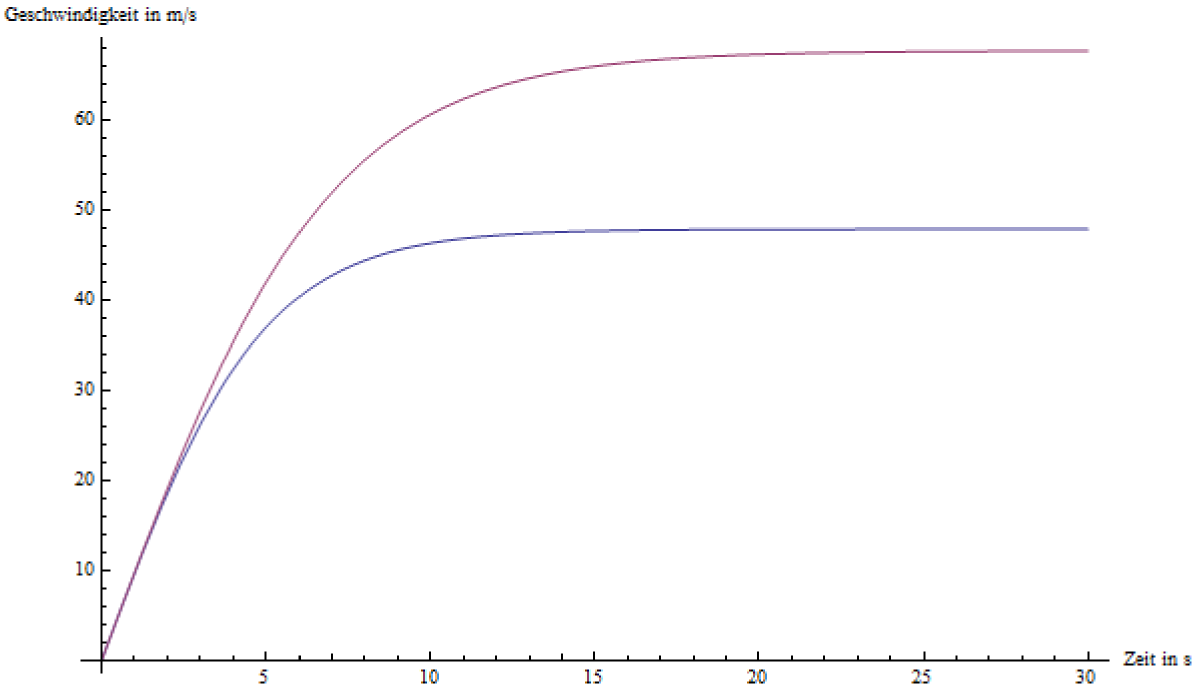

Abbildung 3: Geschwindigkeit aufgetragen gegen die Zeit für zwei Massen (blau=70kg, violett=140kg)

Interessant ist noch die Ortsfunktion zu betrachten. Um diese zu errechnen muss die Geschwindigkeit über die Zeit integriert werden. Die Lösung des Integrals schaut man in einer Tabelle nach: $\int \tanh(ax)\,dx = \frac{1}{a}\ln(\cosh(ax))$.

Somit lautet die Ortsfunktion:

$$s(t) = \frac{v_E(t)^2}{g}\ln(\cosh\left(\frac{g}{v_E(t)}t\right))$$

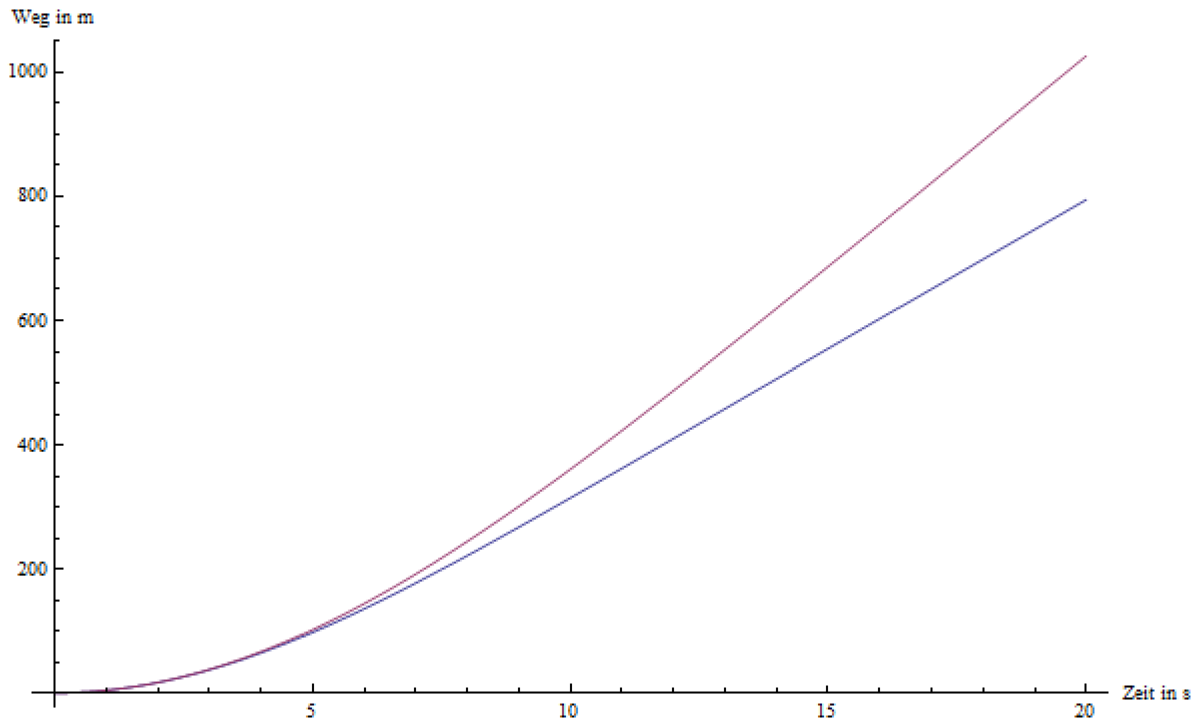

Abbildung 4: Ort aufgetragen gegen die Zeit für zwei Massen (blau=70kg, violett=140kg)

In dem ersten Abschnitt des Graphen wächst die Funktion nur langsam, da die Geschwindigkeit niedrig ist. Mit dem Fortschreiten der Zeit erhöht sich die Steigung bis sie einen konstanten Wert, der der Maximalgeschwindigkeit entspricht, einnimmt. Da die Maximalgeschwindigkeit von der Masse des Körpers abhängt, fallen auch schwerere Körper schneller als leichtere.

Quellen

http://de.wikipedia.org/wiki/Newtonsches_Gravitationsgesetz

http://de.wikipedia.org/wiki/Geschwindigkeit

http://de.wikipedia.org/wiki/Str%C3%B6mungswiderstandskoeffizient

http://de.wikipedia.org/wiki/Str%C3%B6mungswiderstandskoeffizient

http://de.wikipedia.org/wiki/Arkustangens_und_Arkuskotangens

http://de.wikipedia.org/wiki/Luft#Luftdichte

Autor: Maxim, http://www.virtual-maxim.de/freier-fall-mit-und-ohne-luftwiderstand/

Letzte Korrektur am 10.10.10